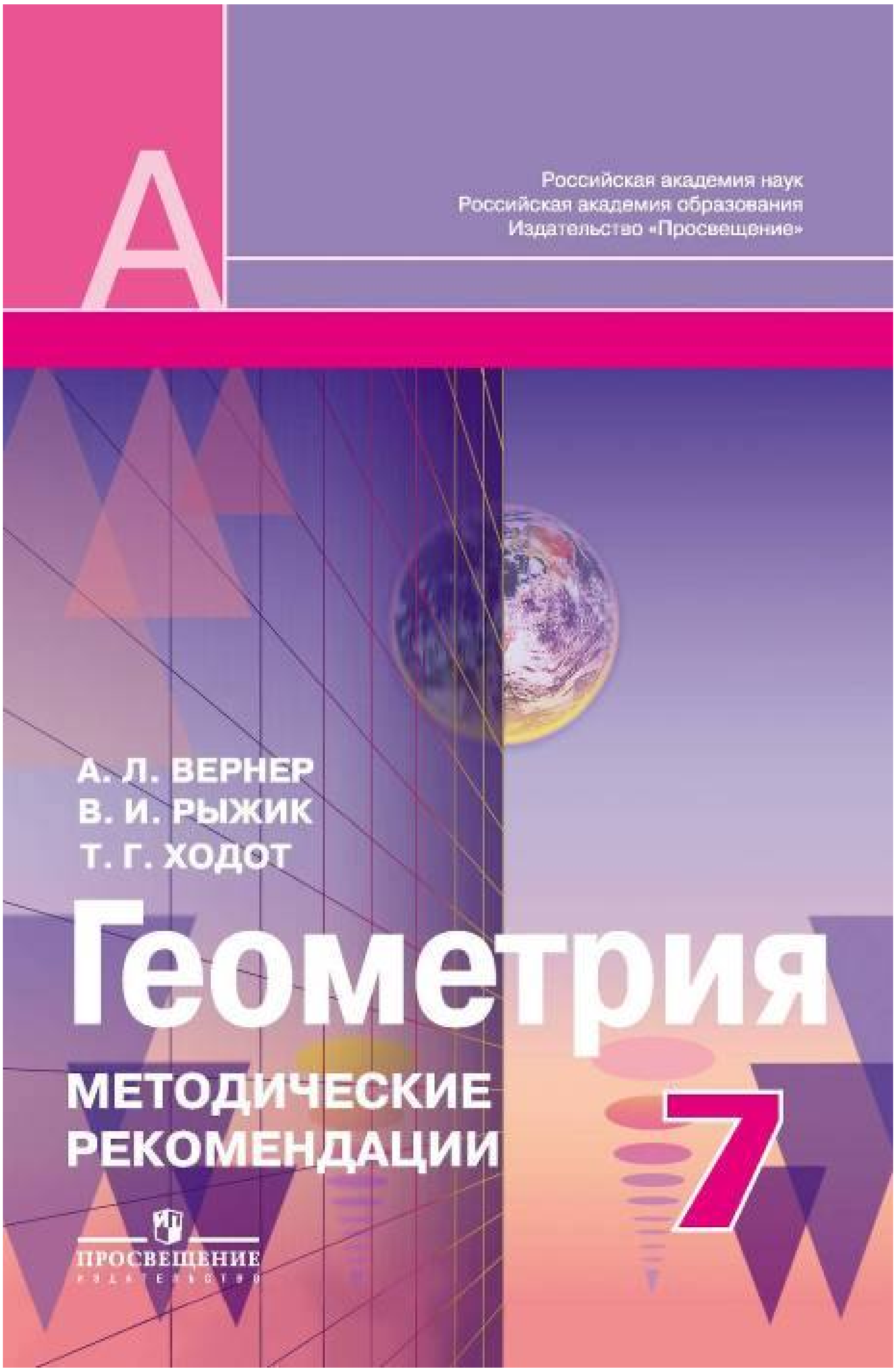


А. Л. Вернер В. И. Рыжик Т. Г. Ходот

ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации

для учителя

7 класс

Пособие для учителей
общеобразовательных учреждений

Москва
«Просвещение»
2012

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
В35

Вернер А. Л.

В35 Геометрия. Методические рекомендации для учителя. 7 класс: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2012. – 000 с.: ил. – ISBN 978-5-09-019849-3.

Книга предназначена для учителей, преподающих геометрию в 7 классе по учебнику авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика, Т. Г. Ходот. Она написана в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре.

Книга содержит концепцию построения курса геометрии в 7 – 9 классах, методические рекомендации по ведению уроков, тесты и контрольные работы, указания к решению задач, тематическое планирование.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-019849-3

Содержание

Концепция построения курса геометрии основной школы

1. Структура цикла учебников геометрии нового поколения для основной школы

Новый цикл учебников геометрии для основной школы создан на основе учебника «Геометрия, 7 – 9» (авторы – А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик) – призёра последнего Всесоюзного конкурса учебников середины 80-х г. прошлого века («Просвещение», 1992), а также трёх учебников «Геометрия, 7», «Геометрия, 8» и «Геометрия, 9» (авторы – А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот) – победителей конкурса учебников нового поколения («Просвещение», 1999–2001). Содержание учебников нового цикла соответствует последним министерским директивным документам (Стандартам второго поколения) и современным педагогическим взглядам. В новом цикле учебников учтён многолетний опыт учителей, работавших по учебникам, на основе которых созданы новые.

В своём курсе авторы выделяют три важнейшие линии: линию построений геометрических фигур – ведущую линию в учебнике «Геометрия, 7», линию вычислений геометрических величин – ведущую линию в учебнике «Геометрия, 8» и линию идей и методов современной геометрии – ведущую линию в учебнике «Геометрия, 9».

Каждый из трёх учебников обладает цельностью и завершённостью своего содержания, и работа по нему не требует обращения к другим учебникам. Это обеспечивается тем, что учебник «Геометрия, 8» начинается с повторения важнейших понятий и предложений курса 7 класса, а в учебнике «Геометрия, 9» повторяются необходимые сведения курса 8 класса. Вместе же эти три учебника охватывают весь раздел «Геометрия» Основного содержания математического образования, в том числе и стереометрическую его часть подраздела «Наглядная геометрия».

Включение стереометрической части «Наглядной геометрии» в систематический курс геометрии 7 – 9 классов авторам представляется необходимым по следующим причинам. Во-первых, элементам стереометрии в курсе «Математика» уделяется мало времени и стоит их повторить более обстоятельно в 7 – 9 классах. Во-вторых, отсутствие стереометрического материала в трёхлетнем систематическом курсе геометрии ведёт к утрате учениками пространственных представлений («стереометрической слепоте»), что вредно для общекультурного развития учеников и создаёт большие трудности в изучении курса стереометрии в старших классах. Наконец, в-третьих, систематический курс геометрии 7 – 9 классов должен охватить весь раздел «Геометрия» Основного содержания, чтобы создать у выпускников основной школы целостное представление об этом предмете.

Учебники не ограничиваются чисто геометрическим содержанием. В них много внимания уделяется общематематическому развитию учеников, о котором речь идёт в разделе «Логика и множества» Основного содержания: в самом начале курса вводятся операции объединения и пересечения фигур, рассказано об аксиомах и теоремах, специальные пункты посвящены способу доказательства от противного, взаимно обратным теоремам, говорится о характерных свойствах, о логической связке «тогда и только тогда». Всё это формирует универсальные логические действия.

На протяжении всего цикла ведётся рассказ об истории геометрии: курс 7 класса начинается с рассказа о возникновении геометрии в древности, о Евклиде и его «Началах», а завершается он рассказом о решении проблемы пятого постулата, о Н. И. Лобачевском и его геометрии, отдельные пункты в учебниках 8 и 9 классов посвящены Фалесу, Пифагору, Архимеду, истории тригонометрии и т. п. Всё это соответствует разделу «Математика в историческом развитии» Основного содержания.

Общекультурному развитию учеников способствует наличие в учебниках рубрик «Справки словесника», в которых даются переводы геометрических терминов, приводятся однокоренные с этими терминами слова. Этому же способствуют многочисленные иллюстрации архитектурных сооружений («застывшей геометрии»), рассказы о симметрии, о её роли, и т. п. Всё это делает учебники интересными для учеников.

Эти учебники рассчитаны на то, что ученики будут их читать, знакомиться в их основном содержании с языком науки – геометрии, понимать этот язык, а в дополнительном материале находить разнообразные связи геометрии с другими сторонами науки и культуры.

Учебники разбиты на главы, главы – на параграфы, параграфы – на пункты. Основной теоретический материал в учебниках цикла минимизирован: в нём оставлены лишь те предложения, которые необходимы для дальнейших теоретических положений. Второстепенные теоретические предложения перенесены в задачный материал.

В каждом пункте, где имеется теоретический материал, после теории идут вопросы для самоконтроля и задачи. Задачный материал разбит на рубрики, названия которых ориентируют учителей и учеников на основной вид деятельности при решении задач этой рубрики. Заголовки задачных рубрик таковы: *разбираемся в решении*, *дополняем теорию*, *смотрим*, *рисуем*, *представляем*, *планируем*, *доказываем*, *находим величину*, *исследуем*, *строим*, *применяем геометрию* и т. д.

Обобщающий характер имеют *задачи к главам*. В них имеется рубрика *применяем компьютер*.

Как учителю работать с каждой из этих рубрик будет сказано в разделе «О системе задач в курсе геометрии 7 – 9 классов».

2. Александровские принципы преподавания геометрии

Преподавание геометрии в школе имеет тысячелетние традиции: всем известно, что «Нет царского пути в геометрии!», что учебник геометрии должен быть лаконичен и сух («После Всемирного потопа сухой осталась одна геометрия»). И с этим мирились как с неизбежным. А учебники геометрии академика Александра Даниловича Александрова (1912 – 1999) заговорили с учителем и учеником совсем другим языком. Вот как начал он первый свой учебник «Начала стереометрии, 9» (М.: Просвещение, 1981):

«Геометрию можно коротко определить как науку о фигурах. Каждый человек имеет наглядное понятие о пространстве, о телах, о фигурах. Но в геометрии свойства фигур изучаются в отвлечённом (абстрактном) виде и с логической строгостью.

Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика – привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины – «лёд и пламень не столь различны меж собой». Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины – со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, обращаясь к определению, теореме или задаче, нужно прежде всего представить и понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или, ещё лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чём идёт речь, и одновременно понять, как это точно выражается.

Приступая к изучению доказательства теоремы или к решению задачи, следуйте такому принципу: старайтесь видеть – нарисовать, вообразить – и одновременно следить за логикой рассуждения; карандаш должен набрасывать или аккуратно рисовать соответствующие картинки и тут же выписывать кратко в словах и формулах основные ходы рассуждения.

Геометрия возникла из практических задач, её предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счёте в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется повсюду, где нужна малейшая точность в определении формы и размеров; и технику, и инженеру, и квалифицированному рабочему геометрическое воображение необходимо, как геометру или архитектору» (с. 6 – 7).

В процитированном отрывке говорится и о принципах изучения геометрии, и о принципах её преподавания. Ряд таких принципов сформулирован А. Д. Александровым в его статьях в журнале «Математика в школе». Выделим главные из них.

Принцип 1. Геометрия в своей сущности есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга. Поэтому геометрия и должна быть преподана в соединении *наглядности и логики*, как живое пространственное воображение, пронизанное строгой логикой.

Принцип 2. Поскольку одной из сторон геометрии является её строгая логичность, а школьники 7 – 9 классов уже способны воспринять эту логичность, то курс геометрии должен быть изложен с достаточной строгостью, без логических разрывов в *основной линии курса.*

Принцип 3. Так как второй основной стороной геометрии является её наглядность, то *в преподавании геометрии каждый элемент курса следует начинать с возможно более простого и наглядного, с того, что можно нарисовать на доске, показать на моделях, на реальных предметах, насколько это возможно.*

Принцип 4. Далее, несмотря на высокую степень абстрактности, *геометрия возникла из практики и применяется на практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать её с реальными вещами, с другими дисциплинами, с искусством, с архитектурой и т. д.*

Таким образом, уже перечисленные принципы преподавания геометрии приводят к следующему выводу: *задача преподавания геометрии – развить у учащихся три качества – пространственное воображение, практическое* *понимание и логическое мышление.* Следовательно, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: *логику, наглядное представление, применение к реальным вещам.*

Принцип 5. Учебник, предназначенный для общеобразовательной средней школы, *в основной своей части не должен включать ничего лишнего, второстепенного, малозначительного.*

Принцип 6. Но так как способности и наклонности учащихся весьма различны, то в таком учебнике должен содержаться дополнительный материал, предназначенный для учащихся более сильных и интересующихся математикой.

Принцип 7. *Геометрия должна быть изложена геометрически, она сама содержит в себе метод – прямой геометрический метод понимания, доказательства теорем и решения задач.* Синтетический метод элементарной геометрии не должен быть подавлен в школьном преподавании ни координатным, ни векторным, ни каким-либо другим методом. Прямой геометрический метод проще, важнее и естественнее для целей всеобщего среднего образования и соответствует самому существу геометрии. Он нужен любому человеку, имеющему дело с пространственными объектами.

Принцип 8. Курс школьной геометрии *должен быть причастен к современной науке, включать, по возможности, элементы современной математики.* Кроме того, курс геометрии, как логическая система, где всё доказано, важен для воспитания элементов научного мировоззрения, которое требует доказательств, а не ссылок на авторитеты.

Принцип 9. Но поскольку *абсолютной строгости вообще не существует, то должен быть выбран и принят некоторый уровень строгости и он должен быть выдержан во всём курсе.* Курс не должен иметь логических разрывов, во всяком случае, в основной линии. Иначе в нём будет потеряна система, смазана логика изложения, получится не целостная наука – геометрия, а её фрагменты.

Обсуждая в дальнейшем содержание учебника и методику работы с ним, мы постоянно ссылаемся на эти положения, сформулированные А. Д. Александровым.

3. О системе задач в курсе геометрии 7 – 9 классов

Естественно, что авторские установки в преподавании элементарной геометрии проявились в подборе и структуре задач учебника.

Мы отказались от деления их по сложности и даже от их чисто дидактической классификации. Главным для нас было желание организовать многообразную деятельность ребёнка в процессе геометрического образования. Это стремление определило и содержание, и структурные особенности задачного материала. Важно было и то, что требовалось учесть самые разные ученические мотивации, наклонности и способности.

При этом мы понимаем, что современные возможности позволяют учителю работать в соответствии с собственными установками в преподавании, а потому старались предоставить ему таковые возможности – разнообразием содержания, разными его уровнями и обилием задач, чтобы ему было из чего выбирать. Разумеется, надо отказаться от желания решать все задачи к конкретному пункту. Это вряд ли возможно практически и, по существу, нелепо. Ещё раз – мы даём и учителю, и ученику возможность выбора в организации своей деятельности. Ясно, насколько это стремление отвечает установкам гуманной педагогики.

В учебнике принято такое распределение задач по рубрикам.

1. ***Разбираемся в решении.***

Здесь мы показываем ученикам не только готовые решения и доказательства, присущие теоретическому курсу, но и то, как они могут получаться. Иногда в тексте такого решения появляется (в скобках) знак вопроса – в этом месте ученику предлагается дополнить наше рассуждение самостоятельно.

2. ***Дополняем теорию.***

Известно, что для некоторых часто встречающихся на практике ситуаций удобно иметь и такие сведения, которых, как правило, нет в теоретическом тексте. Например: как расположен центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника по отношению к самому треугольнику. На такие сведения, помещённые среди задач, возможны ссылки наравне с теоретическими сведениями.

3. ***Смотрим.***

Здесь мы учим детей разбираться в информации, представленной наглядно. Также эти задачи нацелены на развитие пространственных (двумерных и трёхмерных) представлений. Ученики должны увидеть в разных ситуациях и положениях уже знакомые фигуры, например, вершины правильного треугольника среди вершин правильного шестиугольника. Ясно, что эти задачи предшествуют самостоятельному изображению фигур.

4. ***Рисуем.***

Опять же развиваем пространственное мышление, но уже в активной форме. Пространственные образы не должны оставаться статичными, для полноценного пространственного мышления необходима их динамика. Этот раздел задач направлен как раз на развитие динамических пространственных представлений.

К тому же есть определённая графическая культура, которой надо научить.

5. ***Представляем.***

А здесь нагрузка на пространственное мышление резко возрастает. Более того, решение задачи, приведённой в этом разделе, и ответ к ней возможны на основании только наглядных представлений, без каких-либо теоретических обоснований. Слово *очевидно* здесь вполне уместно, хотя, конечно, и не гарантирует безошибочности. Например, очевидно, что две прямые могут разбить плоскость на 4 части. Доказательство этого утверждения весьма скучно.

Вместе с тем понятно, что учитель может предложить обосновать полученный учениками ответ к задаче такого рода, тем более что результаты наглядного представления могут не совпадать у разных учеников.

6. ***Работаем с формулой.***

Важный в практическом отношении момент. Даже если ученики и знают некую формулу, они нередко плохо её применяют – не узнают её, если она приведена в других буквенных обозначениях; неверно выражают одну из величин через другие; не связывают её с известными функциональными зависимостями; не чувствуют её в динамике, т. е. при изменении величин, в неё входящих. Особенно все эти ученические недостатки в работе с формулой проявляются при изучении физики.

7. ***Планируем***.

В подавляющем большинстве учебных задач важен не результат, к которому приходит ученик, а тот путь, который приводит к этому результату. Само же получение результата после того, как путь уже намечен, можно оставить ученикам в качестве самостоятельной работы. Помимо прочего, это экономит и время на уроке. В вычислительных задачах ученики должны доводить до конца именно типовые расчёты, все прочие – по желанию учителя. В задачах на планирование более существенно именно понимание последовательности в выполнении операций, а не фактическое их исполнение циркулем и линейкой.

8. ***Находим величину.***

Это обычные учебные задачи на вычисление. Их место в учебном процессе определяется только существующими традициями в преподавании элементарной геометрии.

9. ***Ищем границы.***

Эти задачи достаточно разнообразны, они позволяют сочетать разные математические умения (работа с функцией, решение уравнений и неравенств, тригонометрия), легко варьируется объём работы.

10. ***Доказываем.***

Сюда отнесены более трудные задачи теоретического характера.

11. ***Исследуем.***

Сюда отнесены те задачи, в условии которых или в возможном результате есть некая неопределённость, незавершённость, даже неоднозначность. Вплоть до отсутствия решения.

12. *Строим.*

Здесь приведены вполне обычные задачи на построение.

Для решения их предполагается использование в основном циркуля и линейки. К сожалению, широкое использование задач такого типа в обучении школьников вряд ли возможно – хорошо известно, что полное (четырёхэтапное) решение такой задачи требует немало времени. Особенно много работы в таких задачах требуется при исследовании, когда встаёт вопрос о существовании и о единственности решения. В задачах нашего учебника сделана попытка убрать эту трудность, оставив другие особенности задач на построение. Ученикам предлагается восстановить некую фигуру по оставшимся её фрагментам. В такой редакции ясно, что задача заведомо имеет решение (хотя остаётся вопрос о единственности решения). Ценность задачи на построение ещё и в том, что мы в процессе её решения обучаем школьника составлению алгоритмов, что по нынешним временам очень важно.

Иногда набор инструментов при решении такой задачи ограничен, и тогда она может находиться в разделе «*Занимательная геометрия*». Такого рода задачи (с разными ограничениями на возможности) способствуют развитию гибкости мышления и близки по стилю к инженерным задачам.

Заметим, кстати, что ограничения на набор используемых инструментов выглядят сейчас только как дань традиции.

13. *Занимательная геометрия*.

В этом разделе – задачи занимательные, исторические и вообще с определённой «непрямой» спецификой.

14. *Применяем геометрию.*

Задачи этого раздела имеют внематематическое происхождение, их ещё надо перевести на математический язык. В отличие от задач, возникших в реальной практике, они могут иметь достаточно искусственное условие.

15. ***Участвуем в олимпиаде.***

Содержание раздела ясно из названия. Все задачи этого раздела взяты из сборников олимпиадных задач.

16. ***Рассуждаем.***

Задачи на чистую логику. Подведение объекта под понятие, построение примеров и контрпримеров, формулировка обратных утверждений, необходимость и достаточность и т. д.

Кроме этих разделов, есть и другие, например, ***Работаем с моделью.***

Ясно, что в учебнике есть такие задачи, которые можно отнести сразу к нескольким разделам, и даже такие, которые не вполне вписываются в предлагаемую структуру. Здесь учитель может действовать по своему усмотрению.

17. ***Применяем компьютер.***

Задачи этой рубрики демонстрируют возможности компьютеров в изучении геометрии. Решая их, используем, например, среду «Живая математика», которую можно скачать по адресу: http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

Методические указания по работе со средой «Живая математика» с демонстрацией учебных видеороликов находятся по адресу: http://www.int-edu.ru/page.php?id=912.

Геометрия 7 класса – это геометрия построений

1. Обсуждение теоретического материала учебника

Структура «Геометрии, 7» такова: Введение «Что такое геометрия», глава I «Начала геометрии», глава II «Треугольники», глава III «Расстояния и параллельность», Дополнение «Аксиома прямоугольника и параллельность», предметный указатель, избранные ответы.

Введение (3 часа).

Это своего рода увертюра ко всему курсу геометрии. Оно разбито на пять пунктов. *1.* Как возникла и что изучает геометрия. *2.* О задачах геометрии. *3.* Плоские и пространственные фигуры. *4.* Задачи. *5.* Плоскость, прямая, точка. 6. Об истории геометрии. Значение геометрии.

***Урок* 1** (п. 1. Как возникла и что изучает геометрия; п. 2. О задачах геометрии).

В пункте 1 *Как возникла и что изучает геометрия* рассказано о возникновении геометрии, о превращении геометрии из чисто прикладной науки в научную теорию, говорится о том, что геометрические фигуры, которые изучает геометрия, – это мысленные образы реальных предметов. А в следующем пункте 2 *О задачах геометрии* рассказывается о разнообразных задачах геометрии и выделяется важнейшая для курса 7 класса задача о построении фигур с заданными свойствами. Хотелось бы, чтобы уже с первого урока, посвящённого пунктам 1 и 2, ученики стали читать учебник, обсуждать прочитанное.

***Урок* 2** (п. 3. Плоские и пространственные фигуры; п. 4. Задачи; п. 5. Плоскость, прямая, точка).

В пункте 3 *Плоские и пространственные фигуры* вспоминаются уже знакомые ученикам из **Наглядной геометрии** многоугольники и многогранники, их элементы, приводятся рисунки важнейших фигур, вводятся операции объединения и пересечения фигур. Операции объединения и пересечения фигур в дальнейшем используются очень часто. Все задачи во Введении – это задачи к п. 3. Решая их, ученики учатся *видеть* и *рисовать* простейшие многоугольники и многогранники, их объединение и пересечение. Рисовать и строить семиклассники будут очень много, что соответствует основной линии геометрии 7 класса как *геометрии построений.* Следует подчеркнуть, что хотя в систематическом курсе планиметрии прямоугольник и квадрат будут построены лишь в последней главе, но в задачах они (как и прямоугольный параллелепипед и куб) появляются с самого начала. Вряд ли у семиклассников возникнут сомнения в их существовании.

В пункте 5 *Плоскость, прямая, точка* рассказано, как пришли геометры к важнейшим геометрическим понятиям: *точка*, *прямая*, *плоскость.* О двух плоскостях, имеющих общую точку, сказано, что они пересекаются по прямой, а две плоскости, не имеющие общих точек, названы параллельными.

***Урок* 3** (п. 6. Об истории геометрии. Значение геометрии.)

В последнем пункте 6 *История геометрии. Значение геометрии* рассказано о Евклиде и его «Началах», о логическом строении геометрии и о роли в геометрии основных утверждений (постулатов и аксиом). Формулируются три первых постулата Евклида, в которых речь идёт о построении отрезков и окружности. Затем формулируются и некоторые интуитивно очевидные аксиомы. Например, *равные одному и тому же равны между собой* или *и половины одного и того же равны между собой.* В дальнейшем такого рода утверждения будут использоваться при доказательствах. В этом же пункте сказано о значении геометрии, и он завершается такой фразой: «Словом, всё, что ни есть в мире, всё находится в пространстве, всё имеет свои формы, и люди сами их создают. И во всём этом – геометрия».

Введение ориентирует семиклассников на дедуктивное, логическое построение систематического курса планиметрии, идущее от «Начал» Евклида и мотивирует важность изучения геометрии. Об истории геометрии, о великих геометрах речь пойдёт в течение всего курса геометрии.

Глава* I. *Начала геометрии (28 часов, 2 контрольные работы).

Глава носит вводный, в основном описательный, ознакомительный характер. Она состоит из трёх параграфов. § 1. Отрезки. § 2. Окружность и круг. Сфера и шар. § 3. Углы.

§ 1. Отрезки (7 часов). *1.1.* Отрезок. *1.2.* Лучи и прямые. *1.3.* Сравнение и равенство отрезков. *1.4.* Действия с отрезками. *1.5.* Измерение длины отрезка. Расстояние между точками. *1.6.* Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников.

Согласно своему принципу 3**,** что *в преподавании геометрии каждый элемент курса следует начинать с возможно более простого и наглядного, с того, что можно нарисовать на доске, показать на моделях, на реальных предметах, насколько это возможно*, А. Д. Александров **основными понятиями** при построении геометрии считает такие понятия: **точка, отрезок, конец отрезка, равенство отрезков**.

Именно в § 1 возникает вопрос об *уровне строгости*, который будет выдержан во всём курсе (см. принцип 9). Авторы решили, что неуместно семиклассникам формулировать аксиомы порядка и непрерывности, потребность в которых появилась у геометров лишь в XIX веке, а Н. И. Лобачевский прекрасно обходился ещё без них. Если вести доказательства на уровне строгости оснований геометрии (именно такой уровень строгости выдержан в монографии А. Д. Александрова «Основания геометрии» (М.: Наука, 1987), то в п. 1.1 следовало бы сформулировать следующие аксиомы:

1. Существуют по крайней мере две точки (*аксиома существования точек*).
2. Каждые две точки можно соединить отрезком (*аксиома существования отрезка*).
3. У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки (*аксиома концов отрезка*).

О точках отрезка, отличных от концов, говорят, что они лежат **внутри** этого отрезка.

4. Точка *C*, лежащая внутри отрезка *AB*, разбивает его на два отрезка *AC* и *CB*, т. е. *AB* есть объединение отрезков *AC* и *CB*, которые имеют лишь одну общую точку *C* (*аксиома разбиения отрезка*).
5. Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов, т. е. для каждого отрезка *AB* существует содержащий его отрезок *AC* с концом *C*, отличным от конца *B* (*аксиома продолжения отрезка*).
6. Объединение двух отрезков, имеющих две общие точки, является отрезком; его концами служат два из концов этих отрезков (*аксиома объединения отрезков*).

***Урок* 4** (п. 1.1. Отрезок).

Из этих шести аксиом формулируем в п. 1.1 четыре наглядно очевидных утверждения: 2, 4, 5, 6 (не называя их аксиомами). Аксиомы 2 и 5 – это уже знакомые ученикам первый и второй постулаты Евклида. Аксиомы 1 и 3 в 7 классе, конечно, не формулируем.

***Урок* 5** (п. 1.2. Лучи и прямые).

Луч и прямая получены в п. 1.2 продолжением отрезка в одну сторону или в обе его стороны: луч *AB* – это объединение всех отрезков *AM*, содержащих отрезок *AB*, а прямая *AB* – это объединение всех отрезков *MP*, содержащих отрезок *AB*.

Утверждение о том, что *через каждые две точки проходит прямая и притом только одна*, формулируется, поясняется, но в седьмом классе не доказывается. Может быть, в конце курса геометрии стоило бы вернуться к нему и доказать его. Такое доказательство дано в конце нашего учебника «Геометрия, 7 – 9» (М.: Просвещение, 2003).

В п. 1.2 формулируются три предложения о разбиении: 1) прямая разбивается точкой на два луча (полупрямые); 2) плоскость разбивается прямой на две полуплоскости; 3) пространство разбивается плоскостью на два полупространства. Из этих трёх предложений второе часто принимают за одну из аксиом порядка. Так поступает и А. Д. Александров. Формулируя его в п. 1.2, мы не говорим о том, что оно является аксиомой.

***Урок* 6** (п. 1.3. Сравнение и равенство отрезков).

Отношение *равенства отрезков* в аксиоматике А. Д. Александрова фигурирует в четырёх аксиомах. Вот первые две из них. Они сформулированы в п. 1.3.

7. Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны (*аксиома сравнения отрезков*).
8. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному отрезку, и притом только один (*аксиома откладывания отрезка*).

Эти две аксиомы иллюстрируются в учебнике сравнением реальных отрезков – деревянных реек наложением их друг на друга. Мотивируя формулировки этих двух аксиом, вполне естественно применять реальные наложения друг на друга реек, но о равенстве предметов в более сложных ситуациях (например, для двух окон или для двух кирпичей) говорить об их наложении друг на друга нелепо. Поэтому в дальнейшем, говоря о равенстве других фигур, начиная с треугольников, мы даём их определения через равенство соответствующих отрезков, а для равенств отрезков сформулированы аксиомы.

***Урок* 7** (п. 1.4. Действия с отрезками).

Аксиома откладывания отрезка позволяет ввести в п. 1.4 операцию сложения отрезков и умножения отрезка на натуральное число.

Для измерения длины отрезка требуются ещё три аксиомы.

9. Если точка C лежит внутри отрезка AB, а точка C_1 лежит внутри отрезка A_1B_1 и выполняются равенства $AC=A_1C_1$ и $CB=C_1B_1$, то $AB=A_1B_1$ (*аксиома сложения отрезков*).
10. Для каждых двух отрезков AB и MP существует отрезок AC, *равный* nMP и содержащий отрезок AB (*аксиома Архимеда*).
11. Если дана последовательность отрезков A_1B_1, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$,… и отрезок A_1B_1

содержит отрезок A_2B_2, отрезок A_2B_2 содержит отрезок A_3B_3 и вообще отрезок A_nB_n содержит отрезок $A_{n-1}B_{n-1}$, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам (*аксиома вложенных отрезков*).

Эти три аксиомы в учебнике не формулируются: аксиомы 10 и 11 – это аксиомы непрерывности, а аксиома 9 – это частный случай аксиомы 2 Евклида о том, что *если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны*, сформулированной в п. 5 Введения.

***Урок* 8** (п. 1.5. Измерение длины отрезка. Расстояние между точками).

В этом пункте на описательном уровне рассказано об измерении *длины отрезка*, а также определено *расстояние между точками* как длина отрезка, соединяющего эти точки. Через длины отрезков выражаются, в конце концов, все другие геометрические величины (площади, объёмы, меры углов).

***Урок* 9** (п. 1.6. Понятие о равенстве фигур. Равенство треугольников).

В конце **§** 1 в п. 1.6 ведётся разговор о *равенстве фигур*, которое сводится к равенству соответственных отрезков, и (что очень важно!) определяется *равенство треугольников, как треугольников, соответственные стороны которых равны.* Это определение позволяет сразу же судить о равенстве треугольников по равенству их сторон и сокращает число традиционных признаков равенства треугольников – убирается трудное доказательство третьего признака равенства треугольников.

Развивая пространственные представления семиклассников, авторы учебника предлагают им в п. 1.6 рисунки тетраэдров (определение тетраэдра дано ещё в п. 1.1), на которых указаны равенства некоторых рёбер тетраэдра, и спрашивают о равенстве граней этих тетраэдров.

Итак, в § 1 построена геометрия на прямой – *одномерная геометрия*.

***Урок* 10.** Решение задач по теме «Отрезки».

§ 2. Окружность и круг. Сфера и шар (5 часов). *2.1.* Определения окружности и круга. *2.2.* Части окружности и круга. *2.3*. Центральная симметрия. *2.4.* Построения циркулем и линейкой. *2.5.* Как определяют сферу и шар.

2.6. Сферическая геометрия.

Описательное знакомство с окружностью и кругом, сферой и шаром сочетается с пунктами о построениях циркулем и линейкой, а также о центральной симметрии.

Урок **11** (п. 2.1. Определения окружности и круга).

Определения окружности и круга в п. 2.1 формулируются дважды разными словами. Полезно приучать учеников к тому, что одно и то же можно сказать по-разному. Это обогащает речь, делает её выразительней. Здесь же говорится и о том, что иногда одни и те же слова могут иметь разный смысл. Так слова *радиус окружности* означают и отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой, и расстояние от центра окружности до любой её точки. Что именно имеется в виду, обычно ясно из контекста.

Равными окружностями называются окружности, имеющие равные радиусы.

Урок **12** (п. 2.2. Части окружности и круга).

В этом пункте термин *хорда*, введённый поначалу лишь для окружности и круга, расширяется затем на отрезок, соединяющий две граничные точки любой фигуры. Дальнейшее показывает удобство такого понимания слова *хорда*. А понятие *граничная точка фигуры* тоже определяется легко – это такая точка, для которой, в любом круге с центром в этой точке содержатся как точки данной фигуры, так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Вряд ли стоит ученикам заучивать эти определения – достаточно будет того, что они смогут оперировать этими понятиями.

Урок **13** (п. 2.3. Центральная симметрия).

Здесь начинается важный разговор о симметрии фигур. Он начинается с *центральной симметрии*. Чтобы сказать о центральной симметрии достаточно знать, что такое середина отрезка. Говорить о центральной симметрии, на плоскости как о повороте на 180° авторам представляется неудачным, поскольку в пространстве аналогии с поворотом нет, а фигуры, имеющие центральную симметрию, встречаются часто: например, наклонный параллелепипед.

Урок **14** (п. 2.4. Построения циркулем и линейкой).

В этом пункте рассказывается о построениях циркулем и линейкой, решается задача о построении треугольника по трём сторонам, и её решение позволяет обсудить проблему разрешимости задачи на построение и вопрос о единственности решений. Здесь же рассказано о неразрешимости циркулем и линейкой классической задачи об удвоении куба и связанной с ней легенде.

Урок **15** (п. 2.5. Как определяют сферу и шар; п. 2.6. Сферическая геометрия).

Завершается § 2 рассказом о сфере и шаре, о сферической геометрии (в пунктах 2.5 и 2.6). Авторы подчёркивают полную аналогию в определении этих стереометрических фигур с определениями окружности и круга. Естественно, рассказ о сфере и шаре связан с тем, что известно школьникам о них из географии. И в дальнейшем сравнение сферической и евклидовой геометрии будет еще встречаться в учебнике (например, при классификации треугольников по углам).

Урок **16**. Решение задач.

Урок **17**. Контрольная работа № 1. Отрезки. Окружность и круг.

Вариант 1

1. Дан отрезок AB. Его длина 12 см. На отрезке AB взята точка K. Вычислите KB, если: а) $KA = 1$ см; б) $KB = 2KA$; в) расстояние от точки K до точки A на 1 см больше расстояния от точки K до точки B; г) расстояние от точки K до точки C, середины отрезка AB, равно 1 см.
2. Постройте на одной прямой два отрезка AB и KM длиной 6 см каждый так, чтобы расстояние между их серединами было равно 1 см. Вычислите длину их пересечения и объединения.
3. Постройте окружность с центром в точке M радиусом 3 см. Проведите диаметр AB и хорду AC. Затем проведите радиус MC. а) Выпишите равные отрезки, имеющиеся на чертеже. б) Вычислите длину отрезка AB.

в) Заштрихуйте сектор, не являющийся сегментом. г) Заштрихуйте сегмент, являющийся сектором.

4. Верно ли утверждение: каждая точка ребра куба принадлежит двум его граням?

Вариант 2

1. Дан отрезок *MP*. Его длина 6 см. На отрезке *MP* взята точка *K*. Вычислите *KM*, если: а) *KP* = 1 см; б) *KP* = 2*KM*; в) расстояние от точки *K* до точки *M* на 2 см больше расстояния от точки *K* до точки *P*; г) расстояние от точки *K* до точки *C*, середины отрезка *MP*, равно 1 см.
2. Постройте на одной прямой два отрезка *BC* и *MP* длиной 8 см каждый так, чтобы расстояние между их серединами было равно 2 см. Вычислите длину их пересечения и объединения.
3. Постройте окружность с центром в точке *O* радиусом 2,5 см. Проведите диаметр *AB* и хорду *AC*. Затем проведите радиус *OC*. а) Выпишите равные отрезки, имеющиеся на чертеже. б) Вычислите длину отрезка *AB*. в) Заштрихуйте сегмент, не являющийся сектором. г) Заштрихуйте сектор, являющийся сегментом.
4. Верно ли утверждение: каждая точка ребра тетраэдра принадлежит двум его граням?

Здесь даётся один из возможных вариантов контрольной работы по темам «Отрезки» и «Окружность и круг». Но, конечно, учитель может как эту, так и дальнейшие контрольные работы составлять по своему усмотрению и проводить в удобные для него сроки.

§ 3. Углы (10 часов). *3.1.*Что называют углом в геометрии. Смежные углы. *3.2.* Равенство углов. Свойство равных углов. *3.3.* Откладывание угла. *3.4.* Сравнение углов. Прямой угол. Биссектриса угла. *3.5.* Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла. *3.6.* Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые. *3.7.* Действия с углами. *3.8.* Измерение углов. *3.9.* Двугранный угол.

Если в двух первых параграфах изложение ещё ведётся на наглядно-интуитивном уровне, то, начиная с § 3, после формулировки двух аксиом об углах в п. 3.2 и 3.3 уже проводятся необходимые доказательства о свойствах рассматриваемых или построенных фигур. Доказанные утверждения ещё не называются теоремами – слово *теорема* появится в следующем параграфе, и, вообще, оно во всём курсе употребляется нечасто, лишь для самых важных утверждений.

***Урок* 18** (п. 3.1. Что называют углом в геометрии. Смежные углы).

Геометрия углов изучается по аналогии с геометрией отрезков, но она богаче геометрии отрезков. *Угол* определяется как часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. Такое определение позволяет естественно рассмотреть далее действия с углами – *арифметику углов*.

***Урок* 19** (п. 3.2. Равенство углов. Свойство равных углов).

Определение *равенства углов* сводится к равенству отрезков. В определении равенства углов, данном А. Д. Александровым, употребляется понятие *хорды угла* – отрезка, соединяющего точки на различных сторонах угла. *Два угла называются равными*, если у них найдутся равные соответственные хорды (т. е. хорды, концы которых равноудалены от вершин углов соответственно). Такое определение в п. 3.2 сначала мотивируется практическим примером об углах между рейками. Чтобы зафиксировать такой угол, надо скрепить стороны угла ещё одной рейкой – в теории это хорда угла. Полученную жёсткую фигуру можно двигать и с её помощью строить углы, равные исходному углу.

Из определения равенства углов непосредственно вытекает, что *все развёрнутые углы равны.* Это утверждение и аксиома Евклида о том, что если от равных отнимают равные, то остатки равны (аксиома 3), позволяют сделать следующий вывод: *два угла, смежные с равными углами, равны* (задача 3.10).

Фактически именно из определений о равенстве углов и о равенстве треугольников и вытекает утверждение о том, что *в равных треугольниках* *соответственные углы равны.* Оно будет сформулировано позднее в п. 4.4 как теорема 2.

Совмещая реальные равные углы, например, два одинаковых чертёжных угольника, убеждаемся в том, что совмещаются соответственные хорды равных углов. Это приводит нас к *аксиоме о свойстве равных углов*: соответственные хорды равных углов равны.

Аксиоме о свойстве равных углов можно дать и такую формулировку: *соответственные хорды от равных углов отсекают равные треугольники*. Первый признак равенства треугольников (он станет теоремой 1 в п. 4.3) – простое следствие этой аксиомы. В задачах к п. 3.2 в рубрике *Смотрим* дано много рисунков с треугольниками, у которых соответственно равны две стороны и угол между ними. Ученики учатся находить такие треугольники и делать вывод об их равенстве.

***Урок* 20** (п. 3.3. Откладывание угла).

Подвижность плоскости обеспечивает *аксиома об откладывании угла*: от каждого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному углу, и притом только один (п. 3.3).

Аналогами этой аксиомы являются аксиомы подвижности плоскости в аксиоматике А. Н. Колмогорова или аксиома о построении треугольника, равного данному треугольнику, в аксиоматике А. В. Погорелова. Как циркулем и линейкой выполнить построение угла, равного данному углу, подробно описывается при решении задачи 3.15. Важно отметить, что в этом решении *доказано*, что построен именно искомый угол.

***Урок* 21** (п. 3.4. Сравнение углов. Прямой угол. Биссектриса угла).

Аксиома об откладывании угла позволяет в п. 3.4 сравнивать углы (подобно тому, как аксиома откладывания отрезка позволяет сравнивать отрезки). *Прямым углом* называется угол, равный смежному с ним углу. Острый угол – это угол, меньший прямого угла, а тупой угол – это угол, больший прямого угла.

В п. 3.4 определяются понятия *биссектриса угла* и *биссектриса треугольника*.

***Урок* 22** (п. 3.5. Построение биссектрисы угла. Построение прямого угла).

Данный пункт посвящён построению циркулем и линейкой биссектрисы угла. В решении этой задачи присутствуют все четыре этапа, на которые распадается решение задачи на построение: 1) анализ (этот этап назван в учебнике *планом* построения; 2) построение; 3) доказательство; 4) исследование. По такому плану в дальнейшем можно решать задачи на построение.

Частным случаем задачи о построении биссектрисы угла является задача о построении прямого угла – биссектриса развёрнутого угла.

Итак, в § 3 решаются циркулем и линейкой важные задачи на построение – построение угла, равного данному углу (задача 3.15), построение биссектрисы угла и прямого угла (п. 3.5), деление отрезка пополам (задача 3.42). Напомним, что линия геометрии построений – ведущая линия в курсе геометрии 7 класса. Решая эти задачи и доказывая, что построена фигура с нужными свойствами, ученики привыкают к необходимости доказательств в геометрии.

Уровень строгости в этих пунктах § 3 становится уже достаточно высоким. В следующих параграфах он в дальнейшем выдерживается. Из аксиом осталось сформулировать в § 7 лишь аксиому параллельности. Все результаты до § 7 не опираются на неё, т. е. относятся к так называемой *абсолютной геометрии.*

***Урок* 23** (п. 3.6. Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые).

Пункт посвящён вертикальным углам. Его содержание вполне традиционно.

***Урок* 24** (п. 3.7. Действия с углами).

Здесь рассматриваются действия с углами по аналогии с действиями с отрезками.

***Урок* 25** (п. 3.8. Измерение углов).

По аналогии с измерением длин отрезков рассказано и о градусной мере углов (п. 3.8).

Отметим также, что если в двух первых параграфах фактически не было задач на доказательство (лишь по одной в каждом из этих параграфов), то в § 3 задач на доказательство уже много.

***Уроки* 26 и 27**. Решение задач по теме «Углы».

***Урок* 28**. Контрольная работа № 2. Углы.

Вариант 1

1. Постройте угол ab с вершиной в точке O величиной 120°. Пусть луч c выходит из точки O и лежит внутри угла ab. Вычислите $\angle cb$, если: а) $\angle ca = 40^\circ$; б) $\angle cb = 2\angle ca$; в) $\angle cb - \angle ca = 10^\circ$.
2. Постройте тупой угол. Постройте циркулем и линейкой его биссектрису. Постройте другой угол с той же биссектрисой. Дополнительные построения не стирайте.
3. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке O. Отложите на одной прямой равные отрезки OP и OM, на другой – отрезки OA и OB, такие, что $OA = 2OP$ и $OB = 2OM$. Постройте отрезки AP и BM и докажите, что они равны.
4. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проведите в его гранях диагонали AB_1 и B_1D_1. Пусть точка O – середина отрезка B_1D_1. Верны ли утверждения: а) отрезок OC_1 перпендикулярен отрезку B_1D_1; б) треугольники ABB_1 и $A_1B_1C_1$ равны?

Вариант 2

1. Постройте угол cb с вершиной в точке O величиной 60°. Пусть луч p выходит из точки O и лежит внутри угла cb. Вычислите $\angle pb$, если: а) $\angle pc = 10^\circ$; б) $\angle pb = 2\angle pc$; в) $\angle pb - \angle pc = 10^\circ$.
2. Постройте острый угол. Постройте циркулем и линейкой его биссектрису. Постройте другой угол с той же биссектрисой. Дополнительные построения не стирайте.
3. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке K. Отложите на одной прямой равные отрезки KA и KB, на другой – отрезки KM и KP, такие, что

$KM = 2KA$ и $KP = 2KB$. Постройте отрезки AM и BP и докажите, что они равны.

4. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проведите в его гранях диагонали AC и C_1D. Пусть точка O – середина отрезка AC. Верны ли утверждения: а) отрезок OD перпендикулярен отрезку AC; б) треугольники CAD и DCC_1 равны?

***Урок* 29** (п. 3.9. Двугранный угол).

Аналогия с обычными углами прослеживается в пункте 3.9 о двугранных углах. Стереометрический материал развивает пространственные представления учеников.

***Уроки* 30 – 32**. *Резерв*.

Изучение главы I – это первое полугодие учебного года. Если она будет изучена раньше, то в конце полугодия можно предложить ученикам несколько докладов по истории геометрии, связанных с единицами измерения геометрических величин.

Глава* II. *Треугольники (20 часов, одна контрольная работа)

Глава начинает изучение *геометрии треугольников*, которое продолжится в 8 классе. В ней два параграфа. § 4. Первые теоремы о треугольниках. § 5. Сравнение сторон и углов треугольника.

§ 4. Первые теоремы о треугольниках (10 часов). *4.1.* О теоремах. *4.2.* Элементы треугольника. *4.3.* Первый признак равенства треугольников. *4.4.* Равенство соответственных углов равных треугольников. *4.5.* Теорема о внешнем угле треугольника. Классификация треугольников. *4.6.* Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра. *4.7.* Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников. *4.8.* Высота треугольника.

***Урок* 33** (п. 4.1. О теоремах).

Слово *теорема* используется в курсе сравнительно редко, главным образом для тех важных теоретических утверждений, которые составляют основную логическую линию курса (в курсе 7 класса всего 9 теорем). Но можно назвать теоремой и любое утверждение, которое доказано. Поэтому любая задача на доказательство – это тоже теорема. Об этом и идёт речь в кратком пункте 4.1. С учениками стоит вспомнить те утверждения из первой главы, которые можно было бы назвать теоремами.

***Урок* 34** (п. 4.2. Элементы треугольника).

Этот пункт посвящён терминологии геометрии треугольника: вершины и углы треугольника, прилежащие и противолежащие вершины и стороны, медианы. Учеников учат находить и указывать в треугольнике прилежащие и противолежащие стороны и углы. Даётся определение медианы треугольника.

***Урок* 35** (п. 4.3. Первый признак равенства треугольников).

Первый признак равенства треугольников (теорема 1, п. 4.3) – это простое следствие аксиомы о свойстве равных углов. Объясняется структура формулировки теоремы и предлагается дать аналогичные формулировки для некоторых доказанных ранее утверждений.

***Урок* 36**. (п. 4.4. Равенство соответственных углов равных треугольников).

Теорема 2 о том, что в равных треугольниках соответственные углы равны (п. 4.4) – это просто следствие определений равных углов и равных треугольников.

***Урок* 37**. Решение задач.

***Урок* 38** (п. 4.5. Теорема о внешнем угле треугольника).

Первое доказательство, использующее дополнительное построение, – это теорема 3 о внешнем угле треугольника (п. 4.5). Эта теорема затем получает многочисленные применения.

***Урок* 39** (п. 4.5. Классификация треугольников).

Первое применение теоремы о внешнем угле треугольников – классификация треугольников по углам (п. 4.5).

***Урок* 40** (п. 4.6. Перпендикуляр. Единственность перпендикуляра).

Здесь даётся определение перпендикуляра к прямой, доказывается единственность перпендикуляра, опущенного на прямую из данной точки. Отсюда вытекает параллельность на плоскости двух прямых, перпендикулярных одной прямой. Два последних утверждения доказываются способом от противного.

***Урок* 41** (п. 4.7. Доказательство способом от противного. Второй признак равенства треугольников).

Доказательство способом от противного применяется в курсе довольно часто, поэтому ему посвящен отдельный пункт 4.7. Этим способом доказан второй признак равенство треугольников.

***Урок* 42** (п. 4.8. Высота треугольника).

В этом пункте определяются высоты треугольника и устанавливается их расположение относительно треугольника. Третьего признака равенства треугольников нет, так как равенство треугольников определяется равенством их соответственных сторон. Теория треугольников значительно упростилась.

§ 5. Сравнение сторон и углов треугольников (8 часов). *5.1.* Равнобедренный треугольник. *5.2.* Серединный перпендикуляр. *5.3.* Взаимно обратные утверждения. *5.4.* Сравнение сторон и углов треугольника. *5.5.* Осевая симметрия.

***Урок* 43** (п. 5.1. Равнобедренный треугольник).

***Урок* 44** (п. 5.2. Серединный перпендикуляр).

Содержание пунктов 5.1 и 5.2 вполне традиционно: в п. 5.1 доказана теорема 4 о свойствах равнобедренного треугольника, а в п. 5.2 доказаны свойство и признак серединного перпендикуляра.

***Урок* 45** (п. 5.3. Взаимно обратные утверждения).

Свойство и признак серединного перпендикуляра являются взаимно обратными утверждениями. Таким утверждениям, их истинности и ложности посвящен специальный пункт 5.3. Он начинается отрывком из известной книги Л. Кэрролла «Алиса в Стране Чудес», где участники «безумного чаепития» объясняют Алисе, что взаимно обратные утверждения – это не одно и то же. Итогом п. 5.3 является теорема 5 о серединном перпендикуляре, в формулировке которой используется выражение *тогда и только тогда*, которое в дальнейшем часто используется для краткой формулировки равносильных утверждений.

***Уроки* 46 и 47** (п. 5.4. Сравнение сторон и углов треугольника).

В этом пункте, как и в предыдущем, доказаны два взаимно обратных утверждения о том, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона. Они объединены в теореме 6. При доказательстве теоремы 6 используется теорема о внешнем угле треугольника. Из теоремы 6 получены важные следствия: признак равнобедренного треугольника, утверждения, что катет короче гипотенузы, что углы, прилежащие к большей стороне треугольника, острые, что высота на большую сторону треугольника лежит внутри него.

***Уроки* 48 и 49** (п. 5.5. Осевая симметрия).

§ 5 завершается пунктом 5.5 об осевой симметрии. Продолжается линия знакомства учеников с симметрией фигур. В этом пункте вводится много новых понятий. Ученики должны уметь объяснять, что значит две точки (две фигуры) симметричны относительно прямой и что значит фигура имеет ось симметрии, приводить примеры фигур, обладающих осевой симметрией. Доказано, что осью симметрии угла является прямая, содержащая биссектрису угла.

***Уроки* 50 и 51**. Решение задач по главе 2 «Треугольники».

Глава II – это строго дедуктивно изложенный раздел абсолютной геометрии.

***Урок* 52**. Контрольная работа № 3. Треугольники.

Вариант 1

1. Проведите две прямые, пересекающиеся в точке *O*. На одной из них отложите равные между собой отрезки *OA* и *OB*, на другой – равные между

собой отрезки *OK* и *OM*. Докажите, что *AK* = *BM*. Укажите на построенном чертеже угол, равный углу *OAK*.

2. Восстановите равнобедренный треугольник, если от него остались основание и точка на боковой стороне.
3. Нарисуйте треугольник *ABC* и внутри него зафиксируйте две точки *K* и *M*. Постройте на сторонах треугольника *ABC* точки, равноудаленные от точек *K* и *M*.
4. Дан тетраэдр *PABC*, в котором *PA* = *BC*, *AB* = *PC*, *AC* = *PB*. На гранях этого тетраэдра укажите углы, равные углу *ABC*.

Вариант 2

1. Проведите две прямые, пересекающиеся в точке *P*. На одной из них отложите равные между собой отрезки *PK* и *PM*, на другой – равные между собой отрезки *PA* и *PC*. Докажите, что *AK* = *CM*. Укажите на построенном чертеже угол, равный углу *PKC*.
2. Восстановите равнобедренный треугольник, если от него остались боковая сторона и точка на высоте к основанию.
3. Нарисуйте окружность и внутри круга, ограниченного ею, зафиксируйте две точки *A* и *B*. Постройте на окружности, точки, равноудаленные от точек *A* и *B*.
4. Дан тетраэдр *KMOP*, в котором *OK* = *MP* и *OM* = *PK*. На гранях этого тетраэдра укажите угол, равный углу *OKP*.

Глава III. Расстояния и параллельность (14 часов и 1 контрольная работа).

Название главы говорит о том, что в ней речь пойдёт не только о традиционном определении параллельности (которое на практике проверить невозможно), но и о постоянстве расстояния между параллельными прямыми (которое и проверяется реально на практике). В учебнике авторы постоянно обращаются к практике и ученики понимают, что в геометрии изучается окружающий их мир. В главе три параграфа. § 6. Расстояние между фигурами. § 7. Параллельность прямых. § 8. Сумма углов треугольника.

§ 6. Расстояние между фигурами (3 часа). *6.1.* Понятие о расстоянии. *6.2.* Неравенство треугольника.

Урок **53** (п. 6.1. Понятие о расстоянии).

В этом пункте сначала определяется расстояние от точки до фигуры (как расстояние от точки до ближайшей точки фигуры), частным случаем которого является расстояние от точки до прямой. Затем определяется расстояние между фигурами, как расстояние между их ближайшими точками. Приводятся примеры из практики. Опираясь на то, что перпендикуляр короче наклонной, определяем перпендикуляр, опущенный из заданной точки A на плоскость, как кратчайший отрезок, соединяющий точку A с точками этой плоскости. Это позволяет определить высоту пирамиды.

Урок **54** (п. 6.2. Неравенство треугольника).

Доказательство неравенства треугольника в п. 6.2 вполне традиционно. Это неравенство позволяет получить условие разрешимости задачи о построении треугольника по трём сторонам.

Урок **55**. Решение задач по содержанию § 6.

§ 7. Параллельность прямых (6 часов). *7.1.* Признаки параллельности прямых. *7.2.* Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности. *7.3.* Проблема пятого постулата. *7.4.* Свойства углов, образованных параллельными и секущей. *7.5.* Построение прямоугольника. *7.6.* Полоса.

Урок **56** (п. 7.1. Признаки параллельности прямых).

Признаки параллельности прямых (п. 7.1) – простые следствия теоремы о внешнем угле треугольника. Получить эти следствия ученики могут сами, применив знакомый им способ от противного и вспомнив ещё раз теорему о внешнем угле треугольника.

Уроки **57 и 58** (п. 7.2. Пятый постулат Евклида и аксиома параллельности;

п. 7.3. Проблема пятого постулата).

Формулировку Евклидом пятого постулата естественно связать с построением треугольника по стороне и двум углам – пятый постулат обеспечивает разрешимость этой задачи (п. 7.2). После решения этой задачи в п. 7.2 сказано, что сейчас пятый постулат заменяют аксиомой параллельности, формулируется эта аксиома, а затем из неё выводятся два планиметрических следствия: о том, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны, и о том, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую из них. В конце п. 7.2 доказана равносильность пятого постулата (в нём говорится о непараллельности прямых!) и современной формулировки аксиомы параллельности. Поэтому в дальнейшем, когда требуется установить параллельность прямых, можно ссылаться на пятый постулат.

Специальный пункт 7.3 посвящён истории работ по проблеме пятого постулата и созданию Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии.

***Урок* 59** (п. 7.4. Свойства углов, образованных параллельными и секущей).

Содержание этого пункта вполне традиционно. В нём снова применяется способ от противного. Стоит обратить внимание учеников на силу этого способа.

***Урок* 60** (п. 7.5. Построение прямоугольника).

Здесь описано построение прямоугольника – фигуры давно и хорошо известной ученикам, но существование которой может быть лишь теперь логически обосновано. При построении прямоугольника установлен его признак: *четырёхугольник, имеющий три прямых угла, является прямоугольником.*

Равными названы прямоугольники, имеющие соответственно равные стороны.

***Урок* 61** (п. 7.6. Полоса).

В последнем пункте § 7 – п. 7.6 установлено, что две параллельные прямые идут на постоянном расстоянии друг от друга, и вводятся понятия *полоса* и *ширина полосы*.

§ 8. Сумма углов треугольника (4 часа). *8.1.* Теорема о сумме углов треугольника. *8.2*. Следствия из теоремы о сумме углов треугольника.

***Урок* 62** (п. 8.1. Теорема о сумме углов треугольника).

Теорема о сумме углов треугольника – важнейший факт евклидовой геометрии.

***Урок* 63** (п. 8.2. Следствия из теоремы о сумме углов треугольника).

В этом пункте получены важные следствия из теоремы о сумме углов треугольника: 1) о сумме острых углов прямоугольного треугольника; 2) о внешнем угле треугольника; 3) об угле равнобедренного прямоугольного треугольника.

***Уроки* 64 и 65**. Решение задач по материалу главы III.

***Урок* 66**. Контрольная работа № 4. Параллельность. Сумма углов треугольника.

Вариант 1

1. Вычислите углы треугольника ABC, если $\angle A = \angle B = \frac{1}{2}\angle C$.
2. Начертите две параллельные прямые и секущую их прямую. Отметьте пару внутренних односторонних углов. Постройте биссектрису каждого из них. Докажите, что эти биссектрисы взаимно перпендикулярны.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, CC_1 – биссектриса треугольника ABC, $CC_1 = 6$ см. Найдите длину отрезка BC_1.
4. В тетраэдре $PABC$ $PA = PB = PC$, $\angle APB = 40^\circ$, $\angle PBC = 70^\circ$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

Вариант 2

1. Вычислите углы треугольника ABC, если $\angle A = 120^\circ$, а $\angle B = 2\angle C$.
2. Начертите две параллельные прямые и секущую их прямую. Отметьте пару внутренних накрест лежащих углов. Постройте биссектрису каждого из них. Докажите, что эти биссектрисы параллельны.
3. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, AA_1 – биссектриса треугольника ABC, отрезок $BA_1 = 4$ см. Найдите длину биссектрисы AA_1.

4. В тетраэдре *KMOP* $KM = KO = KP$, $\angle KOM = 50^o$, $\angle OKP = 80^o$. Докажите, что треугольник *MOP* – равнобедренный.

Последние ***уроки*** **67 – 70** (если для них останется время) можно посвятить итоговому повторению или Дополнению к учебнику. Материал для итогового повторения можно взять из Введения к учебнику «Геометрия, 8», в котором кратко повторяется основное содержание курса геометрии 7 класса.

В учебнике имеется краткое **Дополнение. «Аксиома прямоугольника и параллельность».** В нём дан ещё один вариант изложения содержания темы *Параллельность*, т. е. двух последних параграфов учебника.

За два тысячелетия решения геометрами проблемы пятого постулата они установили много разнообразных утверждений геометрии, каждое из которых может заменить пятый постулат и тем самым может заменить традиционную аксиому параллельности. С точки зрения авторов и согласно их принципам, традиционную аксиому параллельности, которая не может быть проверена на практике, стоило бы заменить на аксиому о возможности построения прямоугольника с заданными сторонами (мы окружены всевозможными реальными прямоугольниками, сделанными руками человека). В некоторых ранее изданных наших учебниках мы уже шли по такому пути, причём как учителя, так и ученики хорошо работали по этим учебникам. В академическом учебнике мы даём оба варианта изложения темы *Параллельность.* Учитель может выбрать тот путь, который ему больше нравится, или сравнить с учениками оба этих пути. Обсуждая два различных подхода к изложению темы *Параллельность*, учитель вместе с учениками выполнит исследование по проблеме пятого постулата.

В первом пункте Дополнения формулируется *аксиома прямоугольника*: по любым двум отрезкам a и b можно построить прямоугольник со сторонами a и b. Во втором пункте сначала доказывается, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^o (достраивая его до прямоугольника). А затем, разбивая высотой любой треугольник на два прямоугольных треугольника, получаем, что сумма углов любого треугольника равна 180^o. Наконец, в п. 3 Дополнения доказывается единственность параллельной прямой.

Итоги

Завершается курс 7 класса. Выделим основное, изученное семиклассниками, вспомнив, какие задачи мы ставили перед курсом геометрии.

Во-первых, школьники научились строить фигуры с теми или иными свойствами.

Во-вторых, они стали доказывать, что построенные фигуры обладают требуемыми свойствами.

В-третьих, ученики узнали об аксиомах, на которые опираются доказательства остальных предложений геометрии.

В-четвёртых, опираясь на эти аксиомы, учащиеся доказали девять теорем и вывели многие следствия из них.

В-пятых, школьники начали знакомиться с симметрией фигур.

В-шестых, они научились видеть и рисовать геометрические фигуры.

В-седьмых, повысилась логическая культура учащихся: они узнали о взаимно обратных утверждениях, о способе доказательства от противного и о других общематематических понятиях.

В-восьмых, решая разнообразные задачи, выбирая различные способы их решения, семиклассники постоянно развивали свои умственные способности.

Наконец, в-девятых, они начали знакомство с богатой историей геометрии, узнали о её применениях в практике.

Это хороший итог занятий геометрией в 7 классе и прочный фундамент для её изучения в дальнейшем.

2. Решение задач учебника и ответы к ним

Введение. Что такое геометрия

6. Если один из двух кубов содержит другой куб, то их объединением будет больший куб, а пересечением – меньший куб.

7. а) Можно; б) можно; в) нельзя.

8. а) Можно; б) можно; в) можно; г) нельзя.

9. Цилиндр: а) можно; б) можно; в) нельзя. Конус: а) можно; б) нельзя; в) можно.

Глава I. Начала геометрии

§ 1. Отрезки

1.1. а) 6; б) 9; в) 6; г) 10; д) 18; е) 30.

1.2. а) BC имеет общую точку B с AB и с BB_1 и общую точку C с CC_1 и CD; б) отрезок AC_1 имеет общую точку A с рёбрами, идущими из этой точки, и общую точку C_1 с рёбрами, идущими из этой точки.

1.3. С отрезком AC_1 (BC) не имеют общих точек рёбра, не имеющие с ним общих вершин параллелепипеда.

1.4. Нет, не лежит.

1.7. Отрезок с поверхностью куба может не иметь общих точек, может иметь одну или две общие точки, а также иметь бесконечное число общих точек.

1.8. Эти три диагонали куба пересекаются в одной точке.

1.9. а) Три отрезка; б) стало 6 отрезков – добавилось три отрезка. в) В этой задаче *подсчитывают* пары точек (концы отрезков), составленные из заданной совокупности точек, *перечисляя* эти пары. Если точек стало n (к уже имевшимся $n–1$ точкам добавили ещё одну), то число отрезков возросло на $n – 1$. Всего число S пар из n точек равно такой сумме: $(n – 1) + (n – 2) + ... + 2 + 1$. Эту сумму уже можно считать ответом. Чтобы найти более краткую формулу для суммы S, напишем её ещё раз со слагаемыми, идущими в обратном порядке: $S = 1 + 2 + ... + (n – 2) + (n – 1)$. Тогда становится ясно, что $2S = n(n – 1)$, поскольку $(n – 1) + 1$

$= n$, $(n - 2) + 2 = n$, ..., $2 + (n - 2) = n$, $1 + (n - 1) = n$. Следовательно, $S = 0{,}5n(n - 1)$.

1.10. а) Отрезком *AB*; б) прямой *AB*.

1.11. 4.

1.12. Два луча – *CA* и *CB*.

1.13. Три прямые и 12 лучей.

1.14. Три или одна.

1.15.Треугольник *ABC* (рис. 1). Следует обратить внимание на то, что отрезки, идущие из точки *C* в точки отрезка *AB*, *заполняют* треугольник *ABC*.

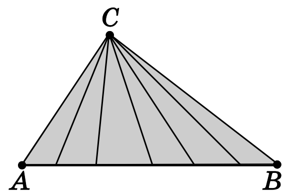


Рис. 1

1.16. Последовательно рассматриваются такие случаи: а) все четыре точки лежат на одной прямой – тогда прямая одна (рис. 2, *а*); б) три точки лежат на одной прямой, а четвёртая лежит не на этой прямой – тогда прямых четыре (рис. 2, *б*); в) среди четырёх точек нет трёх, лежащих на одной прямой, – тогда прямых шесть (рис. 2, *в*).

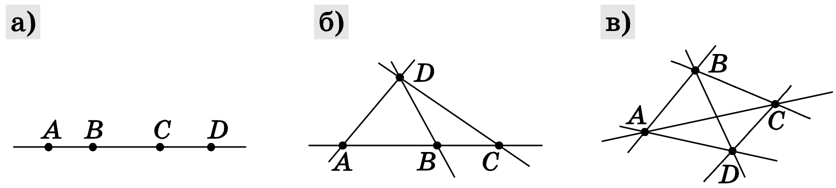


Рис. 2

1.17. Решение такое же, как в предыдущей задаче.

1.18. а) Снова подсчитываются пары точек – 10 пар из пяти точек. б) Если точек *n*, то, как в задаче 1.9, число прямых равно $0{,}5n(n - 1)$. При $n = 6$ их 15, а при $n = 7$ их 21.

1.19. Если четыре прямые лежат в одной плоскости, то может быть столько же точек пересечения, сколько пар прямых, т. е. шесть. Если же они не лежат в одной плоскости, то у них не более четырёх точек пересечения.

1.21. Окружности с центром *O* и радиусом *OA*.

1.22. Решение даёт рис. 54 учебника.

1.26. Точки X заполнят: а) отрезок AB; б) луч, дополнительный к лучу BA.

1.27. Точки X заполнят: а) отрезок CB, серединой которого является точка A; б) лучи, дополнительные к лучам BA и CA.

1.28. Точки X заполнят отрезок MB, где M – такая точка отрезка AB, что $AM = CD$.

1.29. Отрезок CB и отрезок MK, где $AK = AC$ и $AM = AB$.

1.30. Луч CA, где точка C – середина отрезка AB.

1.31. $AB < AC < AC_1$.

1.32. У прямоугольного параллелепипеда могут быть равными друг другу только 4, 8 или 12 рёбер.

1.37. а) Дано: $AC = BD$. Доказать: $AD = BC$. Если точки C и D совпали, то очевидно, что $AD = BC$. Если точки C и D не совпали, то для расположения точек C и D могут представиться такие случаи. 1) Отрезки AC и BD общих точек не имеют (рис. 3, *а*). Тогда $AB = AC + CB$ и $AB = AD + DB$, а потому $AD = BC$ (аксиома 3 Евклида). 2) Равные отрезки AC и BD имеют общий отрезок CD (рис. 3, *б*). Тогда $AC = AD + DC$ и $BD = BC + CD$, а потому $AD = BC$ (аксиома 3 Евклида). б) В этом случае применяем аксиому 2 Евклида.

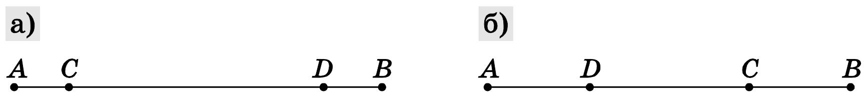


Рис. 3

1.38. Пропедевтика преобразования гомотетии. Аккуратные построения и измерения должны дать такие результаты: $MN = 2BC$ и $PQ = 3BC$.

1.41. Рис. 4.

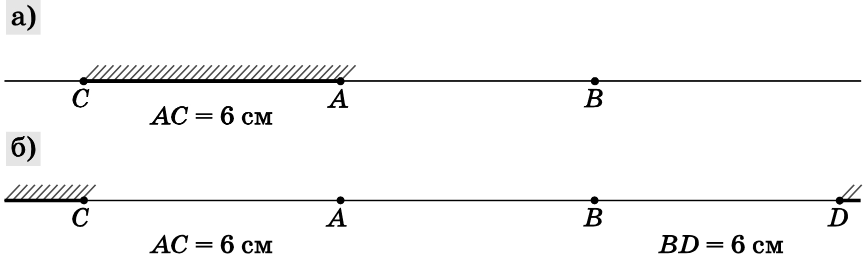


Рис. 4

1.42. Рис. 5.

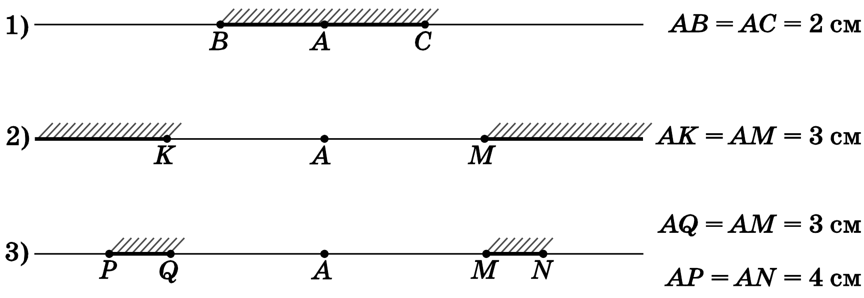


Рис. 5

1.43. Рис. 6.

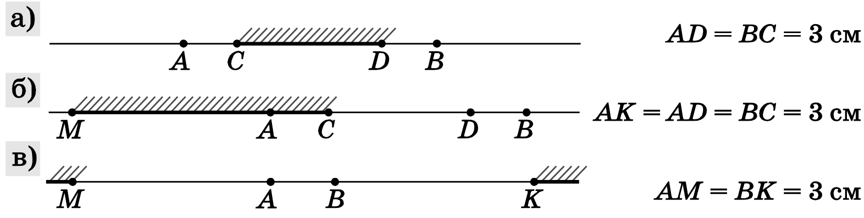


Рис. 6

1.44. $AB = BC = CD = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD.$

1.45. а) 24 мм; б) 68 мм.

1.46. а) 48 мм; б) 16 мм; в) 64 мм.

1.47. Рис. 7.

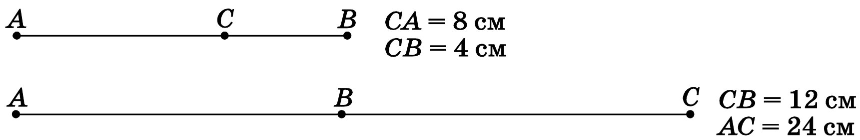
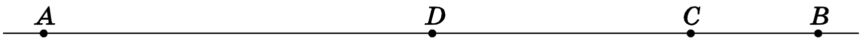


Рис. 7

1.48. При решении задач «а» и «б» ученики должны понять, что длина объединения двух перекрывающихся отрезков меньше суммы их длин на длину их общей части. Поэтому в случае «а» длина объединения равна 5 + 6 – 2 = 9, а в случае «б» длина пересечения равна 5 + 6 – 10 = 1. Если в задаче «в» неизвестную длину второго отрезка обозначить через x, то $x + 4 = 7 + 1$. Поэтому $x = 4$.

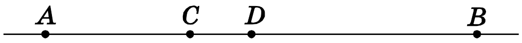
1.49. а) Рис. 8, *а*. б) Рис. 8, *б* и *в*. в) Если $a > b$, то $d = 0{,}5(a - b)$ (рис. 8, *г*). Если $a < b$, то $d = 0{,}5(b - a)$ (рис. 8, *д*). Эти формулы можно объединить так: $d = 0{,}5|a - b|$.

а)



$AC = 10$ см, $CB = 2$ см, $AD = 6$ см, $CD = 10 - 6 = 4$ см

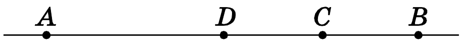
б)



$AC = 3$ см, $CD = 1$ см, $AD = AC + CD = 4$ см

$BD = AD = 4$ см, $CB = CD + DB = 5$ см

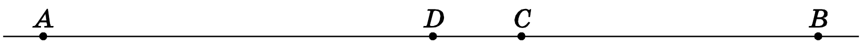
в)



$AC = 3$ см, $CD = 1$ см, $AD = AC - CD = 2$ см

$BD = AD = 2$ см, $CB = BD - CD = 1$ см

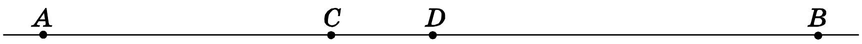
г)



$AC = a, CB = b, a > b, AD = DB = \frac{a+b}{2} > b,$

$CD = BD - CB = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} = d$

д)



$AC = a, CB = b, a < b, AD = DB = \frac{a+b}{2} > a,$

$CD = AD - AC = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} = d$

Рис. 8

1.50. Пусть точка C разбивает отрезок AB длиной a на отрезки $AC = c$ и $CB = b$ (рис. 9). Поскольку $AC + CB = AB$, то $c + b = a$. Пусть точка K – середина отрезка AC, а точка M – середина отрезка CB. Тогда $KM = KC + CM = 0{,}5c + 0{,}5b = 0{,}5(c + b) = 0{,}5a$.

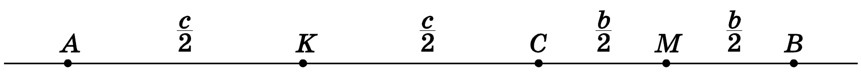


Рис. 9

1.51. Полагая длины сторон треугольника равными a ,b, c, имеем $a + b = 10$, $b + c = 10$, $c + a = 10$. Складывая эти равенства, получаем, что $2(a + b + c) = 30$. Поэтому периметр $a + b + c = 15$ (см), а длина каждой стороны равна 5 см.

1.52. а) $4a$; б) увеличится на $4x$; в) уменьшится на $4y$; г) увеличивается в

k раз; д) $4 < p < 8$; е) изменились на $\frac{1}{4}q$; ж) сторона увеличилась в пять раз.

1.53. Пусть известны расстояния AB и BC. Требуется найти AC. Если точка B лежит внутри отрезка AC, то длина AC равна сумме расстояний AB и BC: $AC = AB + BC$. Если точка B лежит вне отрезка AC, то длина AC равна модулю разности расстояний AB и BC (рис. 10).

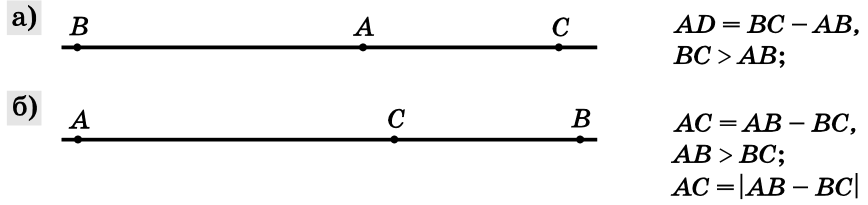


Рис. 10

1.54. Пусть a – длина отрезка, а x и y – длины его частей. а) Если $x = ky$, то $ky + y = a$, $y = a : (1 + k)$, $x = ka : (1 + k)$. б) Если $x - y = b$, то $x = \frac{1}{2}(a + b)$ и $y = \frac{1}{2}(a - b)$. Если точка C лежит вне отрезка $AB = a$ на луче AB, то $AC = x$ и $BC = y$, и можно задать отношение $x : y = k$, а тогда $ky - y = a$, $y = a : (k - 1)$, $x = ka : (k - 1)$. В этом случае можно также задать $x + y = b$, а так как $x - y = a$, то $x = \frac{1}{2}(a + b)$ и $y = \frac{1}{2}(b - a)$.

1.56. а) Врыт 21 столб. Пятый от конца столб удалён от конца на 4 м. Поэтому от начала он удалён на 16 м (20 – 4 = 16). Десятый от начала столб удалён от начала на 9 м, и десятый от конца столб удалён от конца на 9 м. Поэтому расстояние между этими столбами равно 20 – 9 – 9 м, т. е. 2 м. б) 298 столбов.

1.58. Если в основании пирамиды квадрат со стороной 5 см (10 см), то боковое ребро пирамиды равно 15 см (10 см). Такие пирамиды можно построить. Если же основание пирамиды равно 15 см, то пирамиду с боковым ребром 5 см построить нельзя. В общем случае у таких пирамид боковое ребро должно быть больше половины диагонали квадрата, который является основанием пирамиды.

1.61. Три (рис. 11).

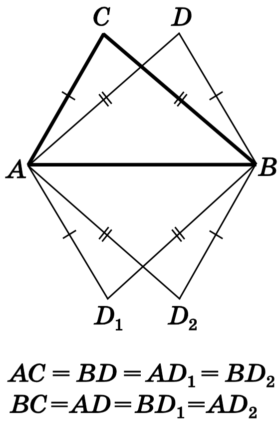


Рис. 11

1.62. Четыре равных друг другу треугольника.

1.64. Можно так: два четырёхугольника равны, если равны их соответствующие стороны и соответствующие диагонали.

1.65. Пусть ΔABC – основание пирамиды $PABC$, $AB = AC$ и $PA = PB = PC$. Возможны следующие случаи. 1) $AB \neq BC$, $AB \neq PA$. Тогда два равных треугольника: $\Delta PAB = \Delta PAC$. 2) $AB \neq BC$, $AB = PA$. Тогда две пары равных треугольников: $\Delta PAB = \Delta PAC$ и $\Delta ABC = \Delta PBC$. 3) $AB = BC$ и $AB \neq PA$. Тогда $\Delta PAB = \Delta PAC = \Delta PBC$. 4) $AB = BC$ и $AB = PA$. Тогда все 4 грани пирамиды равны друг другу.

1.66. Рис. 12.

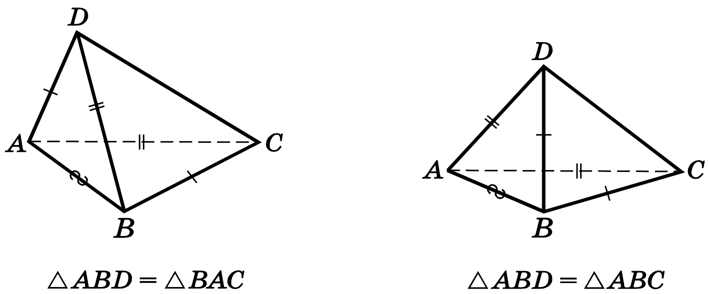


Рис. 12

1.67. Рис. 13.

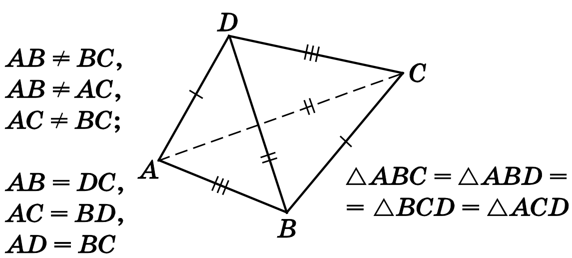


Рис. 13

§ 2. Окружность и круг. Сфера и шар

2.2. На три части (рис. 14, *а*, *б*). На три части (рис. 14, *в*, *г*) или на четыре части (рис. 14, *д*).

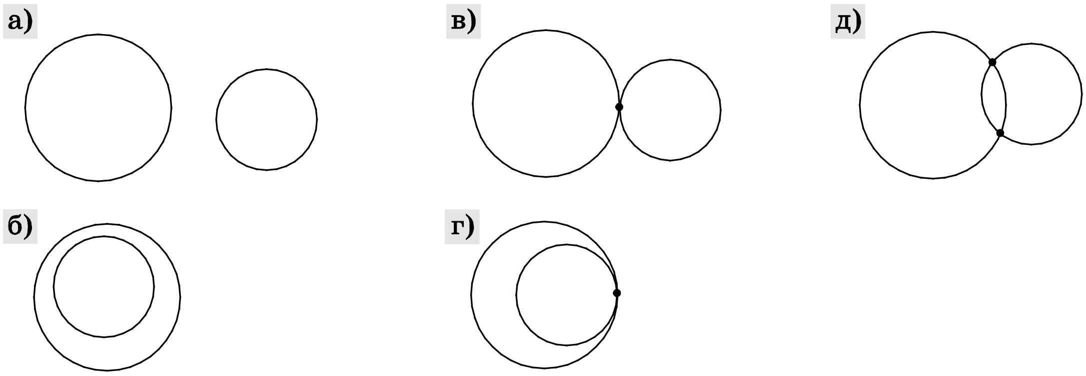


Рис. 14

2.3. Если две окружности равны, то случаев, аналогичных случаям на рис. 14, *б* и 14, *г*, нет. Две равные окружности разобьют плоскости либо на три части (рис. 15, *а*, *б*), либо на четыре (рис. 15, *в*).

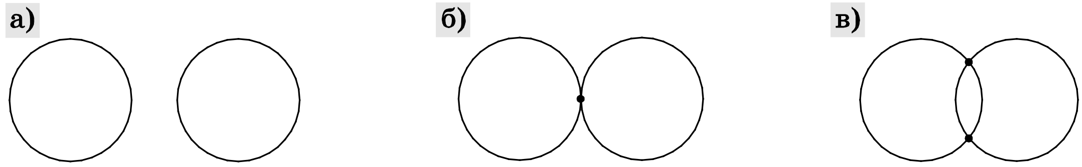


Рис. 15

2.5. Ответ даёт рис. 11 к задаче 1.61.

2.7. Круг с центром O и радиусом a.

2.8. а) Окружность с центром O и радиусом, равным половине радиуса исходной окружности; б) концы, отличные от точки O, заполнят окружность с центром O и радиусом, равным удвоенному радиусу исходной окружности.

2.9. Эти окружности равны.

2.10. Эти центры лежат на одной прямой.

2.11. Наименьший радиус имеет окружность с центром в середине данного отрезка. Остальные окружности имеют любые большие радиусы, а потому окружности с наибольшим радиусом нет.

2.12. Ширина кольца между двумя концентрическими окружностями – это разность их радиусов.

2.14. По окружности, концентрической с данной.

2.15. Можно: вращать надо лист бумаги вокруг одной из ножек циркуля.

2.16. Надо учитывать, что каждая пара точек на окружности задаёт две дуги.

2.18. Рис. 16.

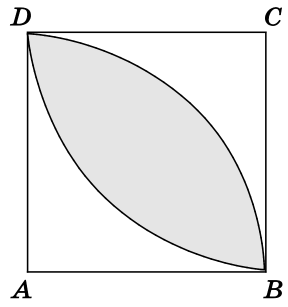


Рис. 16

2.20. В плоскости окружность и прямая могут иметь либо две общие точки (рис. 17, *а*), либо одну общую точку (рис. 17, *б*), либо не иметь общих точек (рис. 17, *в*).

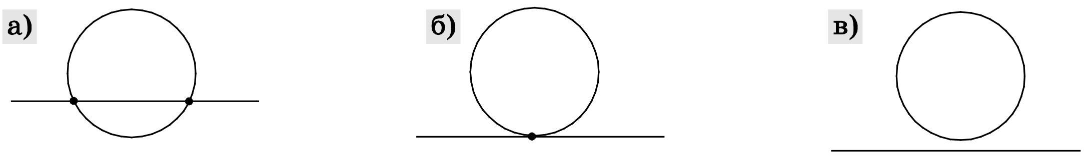


Рис. 17

В плоскости круг и прямая могут иметь либо общий отрезок (рис. 18, *а*), либо одну общую точку (рис. 18, *б*), либо не иметь общих точек (рис. 18, *в*).

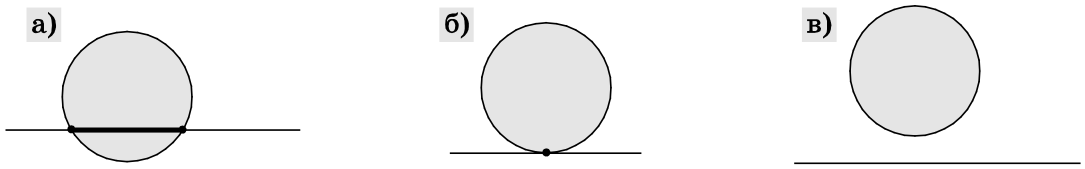


Рис. 18

Если прямая не лежит в плоскости окружности (круга), то она может либо иметь с окружностью (с кругом) одну общую точку (когда эта точка является точкой пересечения прямой с плоскостью, рис. 19, *а*), либо не иметь с окружностью (с кругом) общих точек (рис. 19, *б*).

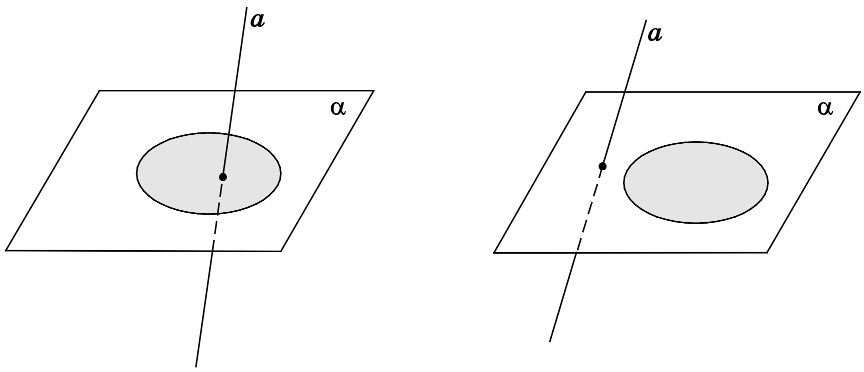


Рис. 19

2.21. На рис. 20 перечислены возможные случаи.

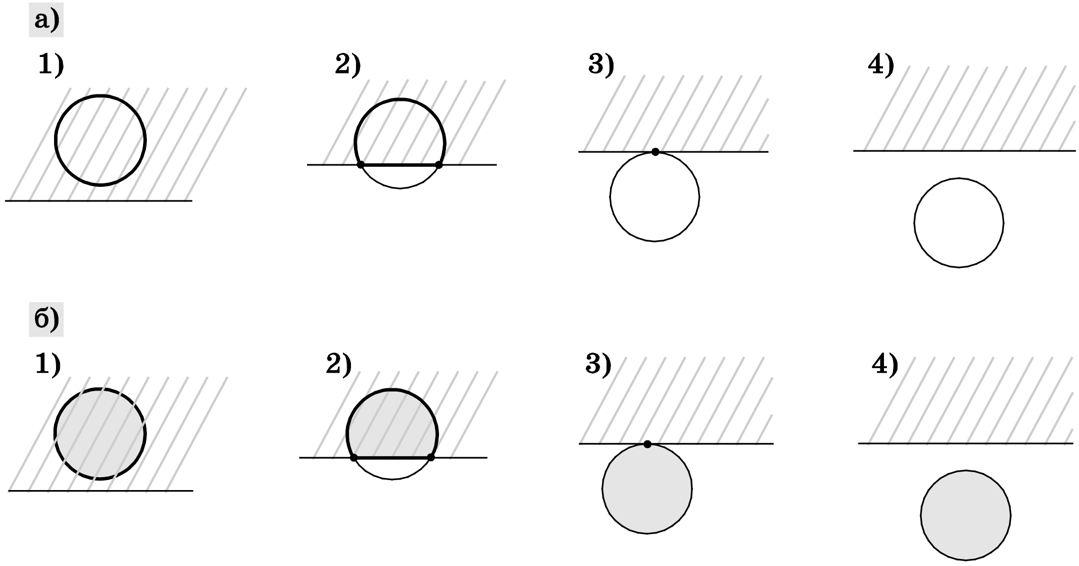


Рис. 20

2.22. Сектором, большим полукруга, или кругом.

2.23. Если два сектора имеют общий радиус, то их объединение – это новый сектор, если такого радиуса нет – то это два исходных сектора.

2.24. Либо сектор, либо диаметр.

2.25. Либо сектор, либо радиус, либо точка – центр круга.

2.26. Да, полукруг является и сектором и сегментом круга.

2.27. Да, на два полукруга.

2.28. а) Диаметр круга – самая длинная его хорда; б) самой короткой хорды в круге нет; в) да; г) да; д) да.

2.29. Две дуги одной окружности можно назвать равными, если, во-первых, их стягивают равные хорды и, во-вторых, обе эти дуги либо не больше полуокружности, либо обе они не меньше полуокружности. Середина дуги – это точка, которая разбивает её на равные дуги.

2.30. а) 3 или 4; б) 4, 5, 6 или 7. Четыре хорды могут разбивать круг на пять, шесть, …, одиннадцать частей (рис. 21).

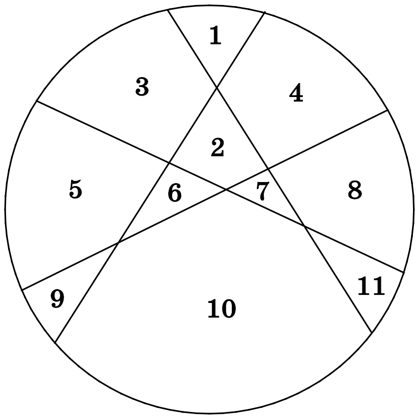


Рис. 21

2.31. а) Две; б) две; в) одну; г) ни одной.

2.42. То, что центрально-симметричные прямые и плоскости параллельны, ученики пока доказать не могут. Поэтому здесь эти утверждения остаются для них на интуитивном уровне. Позднее они будут доказаны.

2.43. Ученик ошибается – окружность должна лежать в некоторой плоскости, а линия на сфере не обязана лежать в некоторой плоскости.

2.44. Рис. 22.

Рис. 22

2.45. а) Рис. 23.

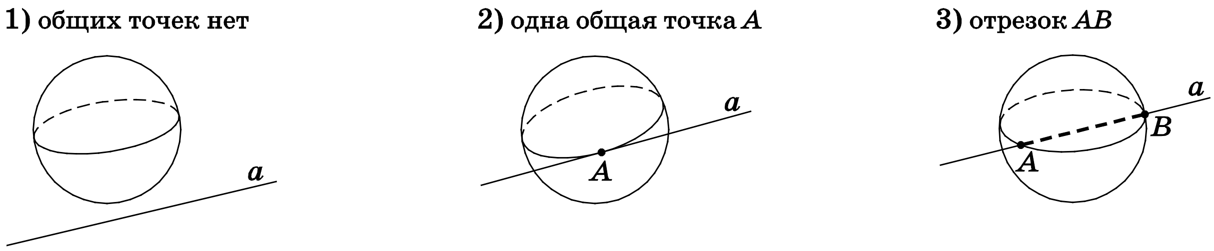


Рис. 23

б) рис. 24.

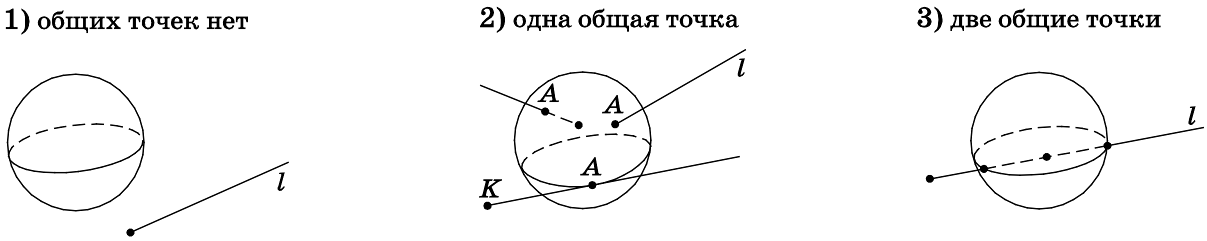


Рис. 24

в) рис. 25.

Рис. 25

2.46. а) Отрезок можно получить в пересечении шара с отрезком, с лучом или с прямой; б) круг можно получить в пересечении шара с кругом, с плоскостью, с полуплоскостью и с другими плоскими фигурами, содержащими круг; в) единственную общую точку с шаром имеет, например, любой отрезок, у которого один конец лежит на поверхности шара, а все остальные точки не принадлежат шару.

2.47. Рис. 26.

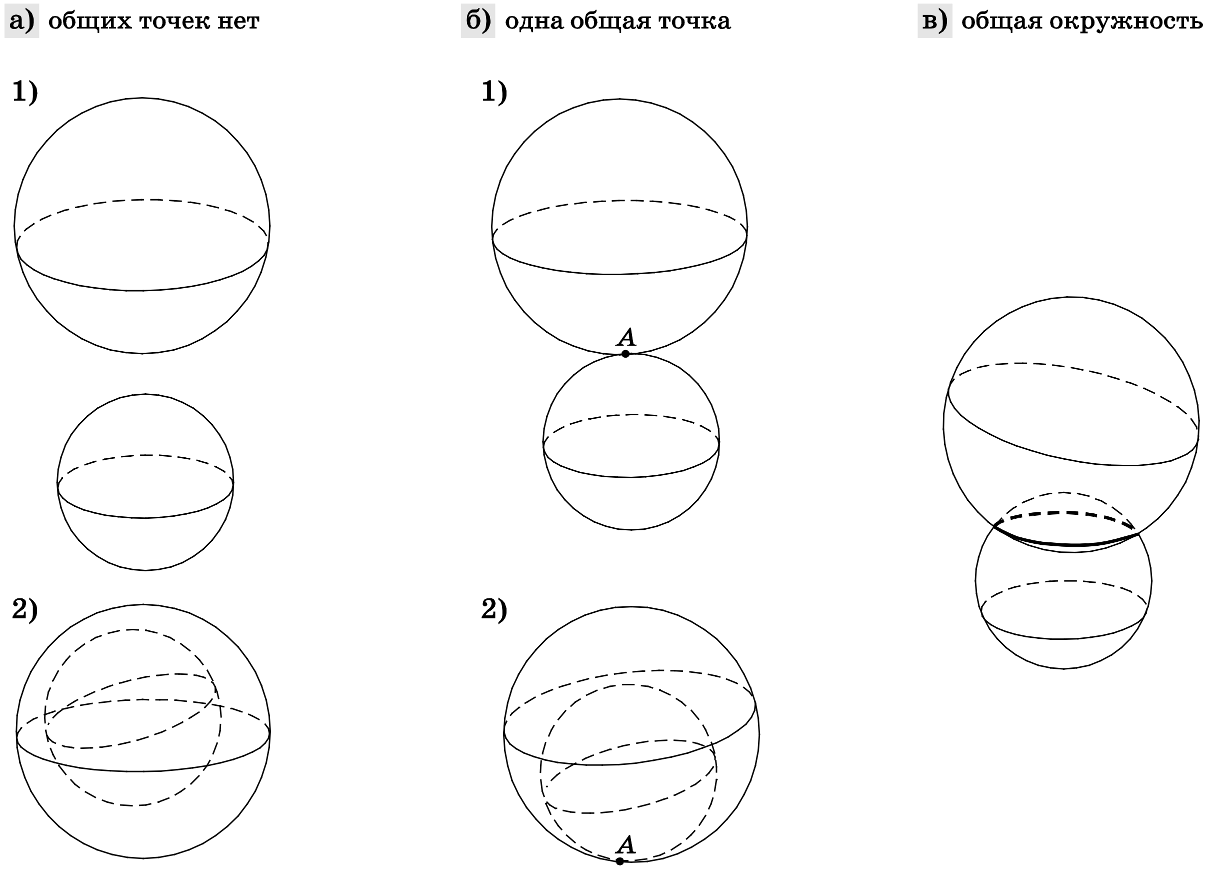
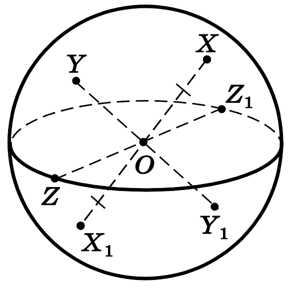


Рис. 26

2.48. Пусть сфера *S* радиуса *R* имеет своим центром точку *O* (рис. 27).



$$OX = OX_1 = OZ = OZ_1 = R$$

$$OY = OY_1 < R$$

Рис. 27

Докажем, что точка *O* является центром симметрии и сферы *S*, и ограниченного ею шара *T*. Чтобы доказать это, надо убедиться, что для любой точки *X* (*Y*) сферы *S* (шара *T*) симметричная ей относительно точки *O* точка X_1 (Y_1) тоже является точкой сферы *S* (шара *T*). Так как $OX_1 = OX$ ($OY_1 = OY$) и $OX = R$ ($OY \le R$), то $OX_1 = R$ ($OY_1 \le R$), т. е. точка X_1 (Y_1) является точкой сферы *S* (шара *T*).

Это достаточно формальное доказательство можно дополнить наглядным представлением о том, что сфера (и шар) состоит из пар точек, симметричных относительно центра O: X и X_1, Z и Z_1 (Y и Y_1). Симметричные относительно центра точки сферы являются концами диаметра сферы (диаметрально противоположными). Если формальное доказательство не проводится, то можно ограничиться этим наглядным представлением.

2.49. Любая плоскость, проходящая через точки A и B, пересекает сферу по окружности, так как таких плоскостей бесконечно много, то и окружностей, проходящих через точки A и B, бесконечно много.

2.50. Если точки A и B не диаметрально противоположные, то через них на сфере S с центром O проходит единственная большая окружность: она получается в пересечении сферы с плоскостью AOB (рис. 28, *а*). Если же точки A и B диаметрально противоположны, то центр O лежит на отрезке AB и любая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекает S по большой окружности, проходящей через точки A и B (рис. 28, *б*).

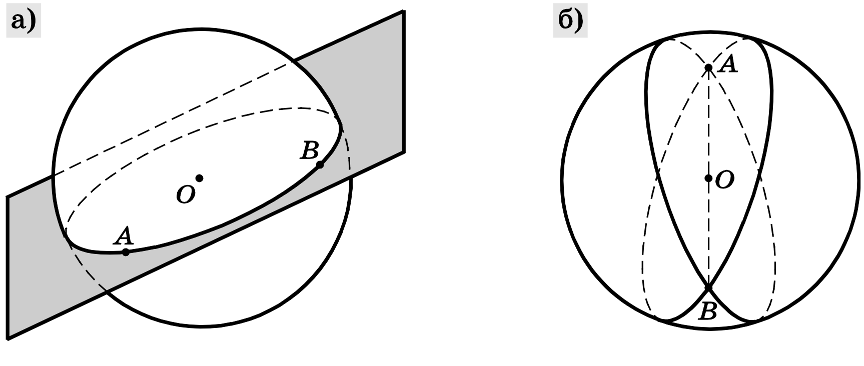


Рис. 28

2.51. На четыре двуугольника.

2.52. Три большие окружности, не проходящие через одну точку, разобьют сферу на 8 частей. Если провести ещё одну, четвёртую окружность, то три предыдущие разобьют её на 6 дуг, и к восьми частям добавится ещё шесть, т. е. станет 14 частей. И далее, добавляя к n уже имеющимся окружностям ещё одну, получаем, что они разбивают её на $2n$ частей, а потому добавляется к уже имеющимся $2n$ частей. Формула получится такая: $2 + 2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n = 2 + n(n + 1)$.

§ 3. Углы

3.7. Эти лучи заполнят угол AOB.

3.8. У граней треугольной пирамиды 12 углов.

3.9. У граней четырёхугольной пирамиды 16 углов.

3.10. а) На простейшем уровне можно сказать, например, так: все развернутые углы равны друг другу; поэтому если из них удалить (от них отнять) равные друг другу углы, то оставшиеся смежные им углы тоже будут равны (аксиома 3 Евклида).

Но можно дать и строгое доказательство, опираясь на аксиомы об углах.

□ Пусть равны $\angle O$ и $\angle O_1$. Тогда (по свойству равных углов) равны и их соответственные хорды AB и A_1B_1 (рис. 29).

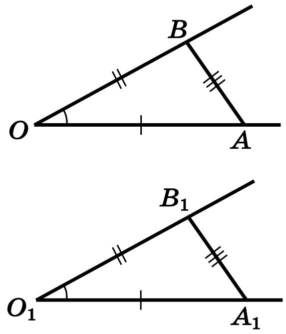


Рис. 29

Рассмотрим углы BOM и $B_1O_1M_1$, смежные с углами O и O_1, полагая, что $OM = O_1M_1$ (рис. 30).

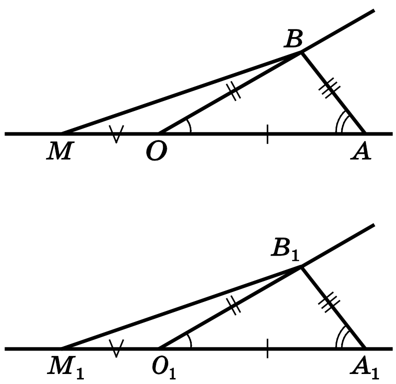


Рис. 30

Тогда отрезки BM и B_1M_1 – соответственные хорды этих углов. Так как $\angle BAO$ и $\angle B_1A_1O_1$ имеют равные соответственные хорды OB и O_1B_1, то $\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$

(по признаку равенства углов). Но отрезки BM и B_1M_1 – соответственные хорды равных углов BAO и $B_1A_1O_1$. По свойству равных углов $BM = B_1M_1$. А так как эти равные отрезки являются и соответственными хордами углов $\angle BOM$ и $\angle B_1O_1M_1$, то по признаку равенства углов $\angle BOM = \angle B_1O_1M_1$. б) Является следствием пункта «а».■

3.18. Например, можно поступить так: построить любой угол O и провести любую окружность S с центром в точке O. Стороны угла O пересекут эту окружность в некоторых точках A и B (рис. 31). Последовательно строим хорды окружности S, равные хорде AB, и проводим через их концы из точки O лучи. Эти лучи и будут ограничивать углы, равные углу O.

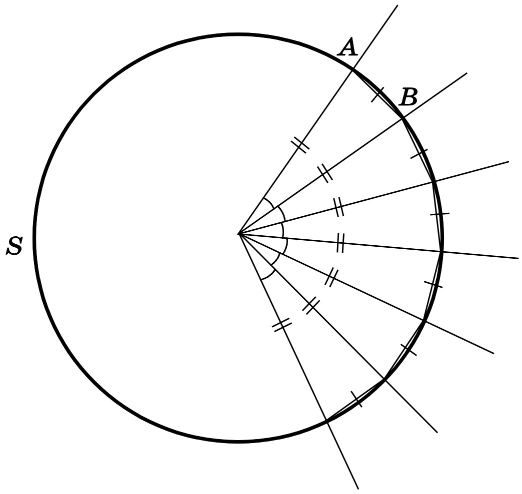


Рис. 31

3.19. $\angle OBC = \angle OCB$ (по определению равенства углов). А тогда $\angle OBA = \angle OCD$ как углы, смежные с равными углами.

3.20. $\angle A = \angle B$ по определению равенства углов.

3.21. а) $\angle AOB = \angle AOC$ по определению равенства углов, так как $OA = OA$, $OB = OC$ и $AB = AC$. б) Доказывается аналогично.

3.22. а) $OA = PA$, $OB = PB$, $AB = AB$. Поэтому $\angle AOB = \angle APB$. б) $OA = PA$, $OB = PB$, $OP = OP$. Поэтому $\angle OAP = \angle OBP$. в) Если радиусы окружностей не равны, то углы OAP и OBP равны, но углы AOB и APB не равны (рис. 32).

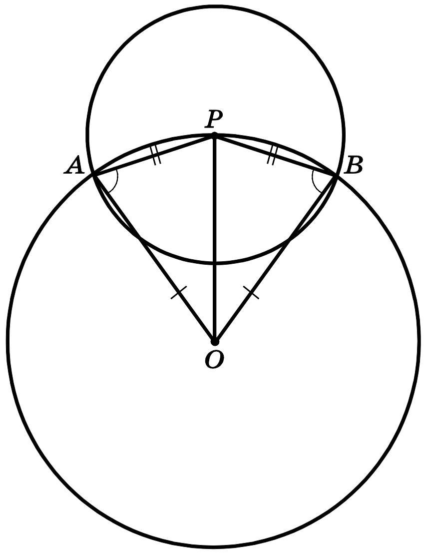


Рис. 32

3.23. Верёвка сначала заменит циркуль. Поэтому она даст возможность построить те точки O_1, A_1 и B_1, которые строятся в решении задачи 3.15. Натянутая верёвка заменит линейку, когда нужно будет соединить эти точки отрезками.

3.26. Нет, углы могут быть прямыми.

3.27. а) Биссектриса развёрнутого угла составляет с его сторонами прямой угол. б) Биссектриса угла, меньшего развёрнутого, составляет с его сторонами острый угол. Биссектриса угла, большего развёрнутого, составляет с его сторонами тупой угол.

3.28. На плоскости это верно, а в пространстве нет: например, углы соседних граней куба не смежные.

3.29. 24.

3.30. Все диагонали граней куба являются соответственными хордами равных друг другу прямых углов. Поэтому все диагонали граней куба равны между собой.

3.31. Пусть $ABCD$ – квадрат (или ромб). Рассмотрим ΔABC и ΔADC: $AC = AC$, $AB = AD$, $BC = DC$. Поэтому $\angle BAC = \angle DAC$ (по определению равенства углов).

3.32. Пусть $ABCD$ – квадрат (или ромб) и O – точка пересечения его диагоналей. Так как $\angle BAO = \angle DAO$ (предыдущая задача), $AB = AD$ и $AO = AO$, то $BO = DO$ как соответственные хорды равных углов. Аналогично $AO = OC$.

3.33. $AB = BC = CA$ как соответственные хорды равных углов. Требуемые равенства углов следуют из определения равенства углов.

3.34. Верёвка и мел позволяют откладывать равные отрезки на сторонах угла и сравнивать их соответственные хорды.

3.35. Следует проверить, что этот угол равен смежному с ним углу.

3.36. Биссектрисы должны пересечься в одной точке.

3.37. Шесть пар из четвертей исходного угла, три пары, равные его половине и одна пара из $\frac{3}{4}$ угла. Всего десять пар.

3.38. Три прямых угла.

3.39. Продолжение задачи 3.36.

3.40. Четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = CD = DA$.

3.41. Если отрезки OA и OB не равны, то отрезки AC и BC не являются соответственными хордами. Поэтому углы AOB и BOC равны не будут.

3.43. Луч BD_1 не лежит в плоскости угла A_1BC_1, а потому его биссектрисой не является.

3.45. На семь частей.

3.47. Если O – точка пересечения диагоналей основания пирамиды $PABCD$, то две пары вертикальных углов образованы прямыми AC и BD, две пары – прямыми PO и AC, и две пары – прямыми PO и BD. Всего шесть пар.

3.48. Тоже вертикальными.

3.49. Если O – центр окружности, то $\angle AOC = \angle BOD$ и $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные. Так как $OA = OB = OC = OD$, то $AC = BD$ и $AD = BC$.

3.50. Углы AOD и BOC – вертикальные, они равны, а AD и BC – соответственные хорды этих углов. Поэтому $AD = BC$. Если $AO = OC$, то $AB = CD$.

3.51. Лучи AK и AM – дополнительные. Если допустить, что дополнительным к лучу будет некоторый луч AP, отличный от AM, то получим, что $\angle CAP = \angle ABK$ как вертикальные, и тогда от луча AC отложены два равных угла CAM и CAP, что противоречит аксиоме откладывания угла.

3.53. Первое равенство верно, а второе – нет, так как точка D не лежит в плоскости угла AB_1C.

3.57. Если сложить два оставшихся угла, то получится удвоенный больший угол, а если их вычесть, то получится удвоенный меньший угол.

3.59. Сумма смежных углов равна развёрнутому углу. Значит сумма половин смежных углов равна половине развёрнутого угла, т.е. прямому углу (рис. 33). Биссектрисы смежных углов являются сторонами этого прямого угла. Поэтому они перпендикулярны.

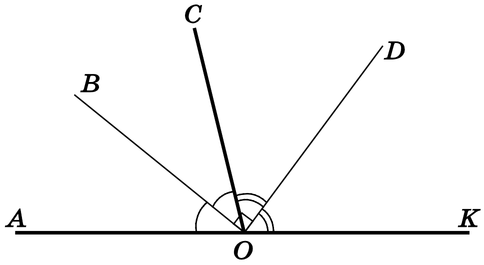


Рис. 33

3.60. Пусть луч p является биссектрисой некоторого угла 1 (рис. 34, *а*). Луч p разбивает угол 1 на два равных угла 3 и 4. Луч p_1, дополнительный к лучу p, разобьёт угол 2, вертикальный углу 1, на углы 5 и 6, вертикальные углам 3 и 4 и равные соответственно этим углам (рис. 34, *б*).

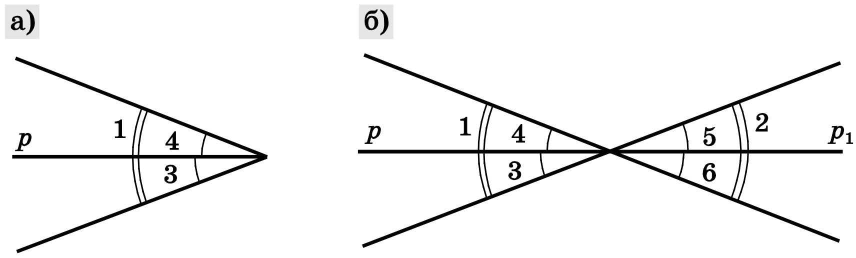


Рис. 34

Так как $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 5$ и $\angle 4 = \angle 6$, то $\angle 5 = \angle 6$. Поэтому луч p_1 является биссектрисой угла 2, т. е. лучи p и p_1 – биссектрисы вертикальных углов 1 и 2 – составляют одну прямую.

3.61. Биссектрисы двух пар вертикальных углов образуют две прямые (задача 3.60). Их перпендикулярность следует из задачи 3.59.

3.62. $\angle ad = \angle ab - \angle bd$. $\angle bc = \angle ab - \angle ac$. Так как $\angle bd = \angle ac$, то

$\angle ad = \angle bc$ (по аксиоме 3 Евклида). Во втором случае углы ad и bc представляем как суммы и ссылаемся на аксиому 2 Евклида.

3.63. Должно получиться равенство: $\angle ABC + \angle DCB = \angle ADC$.

3.64. Должен получиться развернутый угол.

3.65. Должно получиться равенство этих сумм.

3.69. Рис. 35.

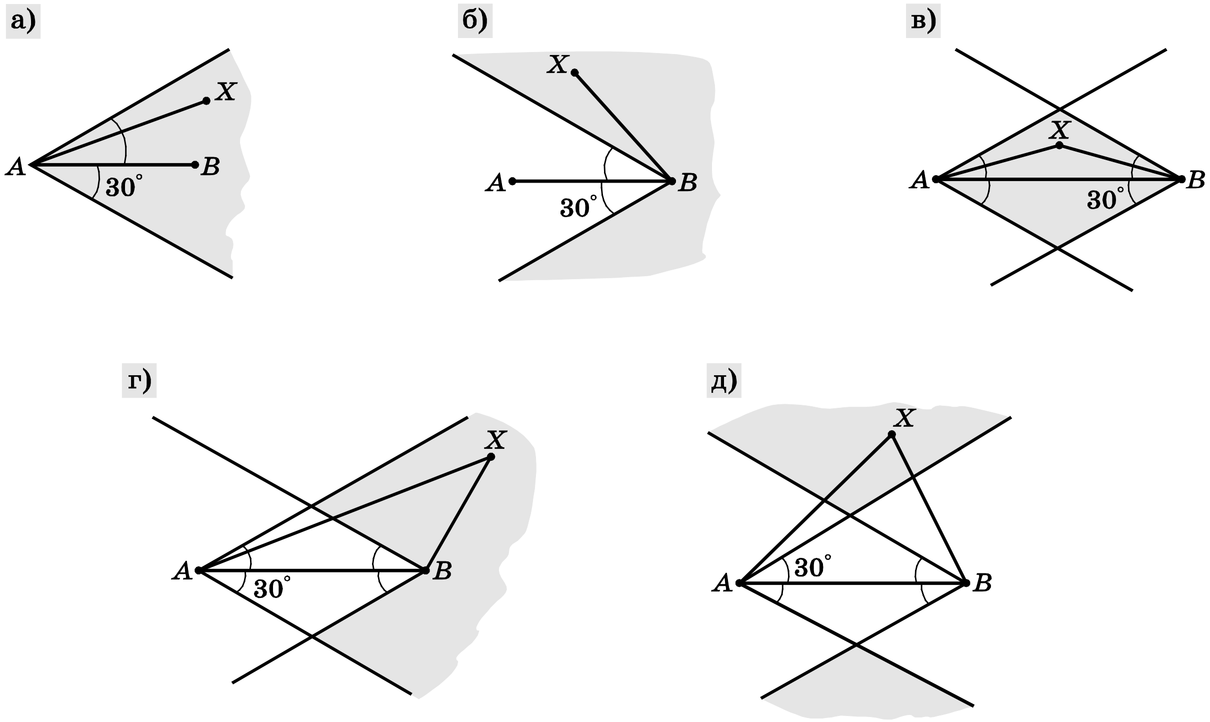


Рис. 35

3.70. а) Коническая фигура, которая получена вращением угла $CAB = 60°$ вокруг прямой AB; б) коническая фигура, которая получена вращением угла $MBK = 120°$ вокруг прямой AB, где BK – луч, дополнительный к лучу BA; в) плоскость, проходящая через точку B и покрытая прямыми, перпендикулярными прямой AB.

3.71. а) $\alpha + \beta = 180°$; б) линейной, от 0° до 180°; в) при возрастании одной другая убывает.

3.73. б) Если известны два вертикальных угла, то остальные найти нельзя.

3.74. Если данный угол имел величину α, то полученные углы будут равны

$\alpha,\ \frac{\alpha}{2},\ 90° - \frac{\alpha}{2},\ 90° + \frac{\alpha}{2},\ 90°.$

3.75. – 3.80. Ответы даны в учебнике.

3.81. а) Пусть AOB – острый угол, луч $OK \perp OA$, луч $OM \perp OB$ и $\angle KOM$ – острый (рис. 36, *а*). Тогда $\angle AOK = \angle AOB + \angle BOK$, $\angle BOM = \angle BOK + \angle KOM$. Так как углы AOK и BOM – прямые, то они равны. Поэтому $\angle AOB + \angle BOK = \angle BOK + \angle KOM$. Следовательно, $\angle AOB = \angle KOM$. б) Если перпендикуляры OK и OM являются сторонами тупого угла, то этот угол вместе с углом AOB и двумя прямыми углами AOK и BOM составляет полный угол, т. е. 360° (рис. 36, *б*). Поэтому сумма углов AOB и KOM равна 180°.

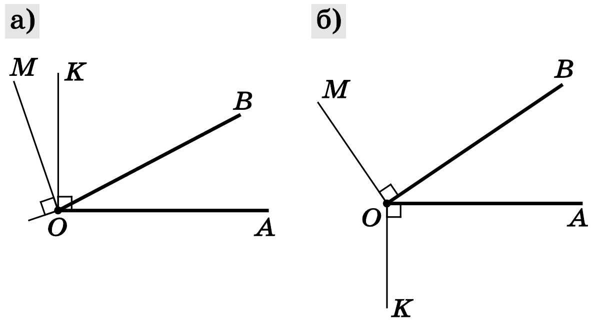


Рис. 36

3.82. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°.

3.83. Равенство «а» верно в случае, указанном на рис. 37. Равенство «б» верно для лучей, не идущих в одну полуплоскость. Для лучей, не лежащих в одной плоскости, оно неверно.

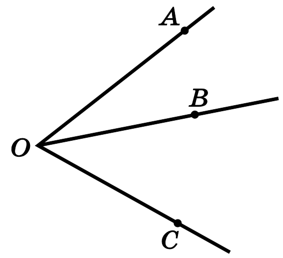


Рис. 37

3.84. Эти углы острые.

3.85. $\angle ABC > \angle ACB$.

3.86. Углы A и B – острые.

3.89. Три двугранных угла.

Задачи к главе I

I.1. а) Объединение данных отрезков разбивается их концами на три отрезка, длины которых $a - c$, c, $b - c$. Поэтому $(a - c) + c + (b - c) = d$. Следовательно, $a + b = c + d$. б) В этом случае длина объединения уменьшается. в) Длина пересечения уменьшается.

I.2. а) $x + (x + 1) + (x + 2) = 10$; б) $x + 2x + 4x = 10$; в) $x + 0{,}5x + x = 10$; г) $x + \frac{x+1}{2} + (x + 1) = 10$. Решая уравнения, находим длины отрезков.

I.3. в) Положим $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $CD = d$ (рис. 38). Найдём зависимости между этими величинами. Для обоих случаев расположения точки C имеем $a = |b - c|$. Выразим d через a, b, c. Если $c > b$ (рис. 38, *а*), то $CD = CB + BD$, т. е. $d = b + 0{,}5a = 0{,}5(b + c)$. Если $b > c$ (рис. 38, *б*), то $CD = CA + AD$, т. е. $d = c + 0{,}5a = 0{,}5(b + c)$. Итак, в обоих случаях $d = \frac{b+c}{2}$.

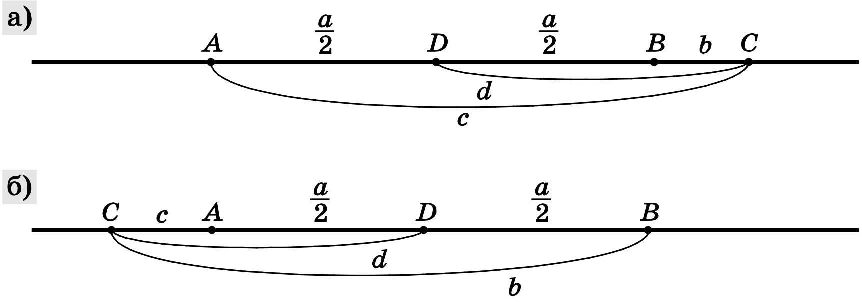


Рис. 38

I.4. а) Надо учесть, что точка C может занять два положения на прямой. Если C между A и B, $AC = 2$ см. Если B между A и C, $AC = 6$ см. б) Снова два случая: $AD = 10$ см или $AD = 2$ см.

I.5. Можно считать прямую AB числовой осью с началом в точке A, на которой точка B имеет координату 2, точка C – координату 3, а точка X – координату x (рис. 39).

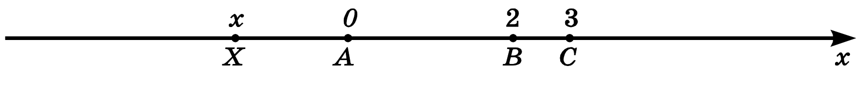


Рис. 39

Тогда равенство $|AX| = |BX| + |CX|$ приводит к уравнению $|x| = |x - 2| + |x - 3|$. Число решений этого уравнения и показывает, сколько раз выполнялось равенство $|AX| = |BX| + |CX|$. Таких решений два: $x = 5$ и $x = \frac{5}{3}$. Аналогично можно рассмотреть равенства $|BX| = |AX| + |CX|$ и $|CX| = |AX| + |BX|$.

I.6. Будем считать прямую AB числовой прямой с началом в точке B и положительным лучом BA, а координату точки A положим равной a (рис. 40).

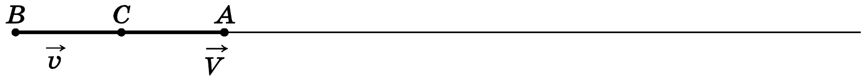


Рис. 40

Тогда координата середины отрезка AB – точки C – равна $0{,}5a$. Через промежуток времени t координата точки B станет равной v_2t, координата точки A станет равной $a+v_1t$, а координата точки C станет равной их полусумме: $0{,}5(a + v_1t + v_2t)$. Поэтому за время t середина отрезка AB пройдёт путь, равный $0{,}5(v_1t + v_2t)$. Следовательно, скорость середины отрезка AB равна $0{,}5(v_1 + v_2)$.

I.7. Рассмотреть два случая: точки могут двигаться в одном направлении или в разных направлениях. Если точки двигаются в одном направлении, то $AB = s$, если двигаются в разных, то $AB = s + 2vt$.

I.8. Удобно представить себе луч AB, на котором последовательно отложены отрезки, каждый длиной в 2 м, и точки A и B чередуются (рис. 41).

Рис. 41

Тогда переменное по направлению движение точки X на отрезке AB изобразится поступательным движением этой точки по лучу AB.

а) Расстояние между соседними точками A на луче AB равно 4 м. Поэтому в точках A точка X оказывается через число секунд t_A, кратное четырём: $t_A = 4n$. В минуте, а также и в часе, число секунд кратно четырём. Поэтому и через 10 мин, и через 1 ч точка X окажется в точке A. А через 5 с точка X окажется в середине отрезка AB – точке C. Поэтому от точки A точка X будет через 5 с удалена на 1 м.

б) Первый раз в точке C точка X окажется через 1 с. Расстояния между соседними точками C на луче AB равно 2 м. Поэтому расстояние между первой и десятой точками C равно 18 м. Его точка X пройдёт за 18 с. Следовательно, десятый раз точка X окажется в точке C через 19 с.

в) За 180 с точка X прошла от первой до сорок шестой точки A (180 : 4 =

45). Ближе к точке A (чем к точке B) она была тогда, когда находилась на отрезках AC и CA (а не на отрезках CB и BC). Сумма длин отрезков AC и CA между первой и сорок шестой точками A равна сумме длин отрезков CB и BC. Поэтому ближе к точке A, чем к точке B (точнее, не дальше от точки A, чем от точки B), точка X была через 90 с.

I.9. а) Ясно, что через 1 с точки K и L встретятся в точке C такой, что AC = 1 м (рис. 42).

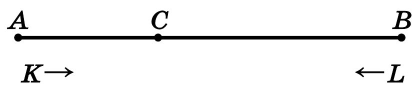


Рис. 42

Точка K возвращается в точку A через 6 с. Точка L возвращается в точку B через 3 с. Так как 10 мин = 600 с, а 1 ч = 3600 с, то через 10 мин и 1 ч точки K и L будут в исходных положениях, а потому KL = 3 м. б) Точки K и L возвращаются в исходные положения через 6 с и процесс повторяется. За 6 с они встретятся 3 раза: через 1 с в точке C, через 3 с в точке B и через 5 с снова в точке C. Поэтому за 60 с они встретятся 30 раз, а за 3 мин = 180 с они встретятся 90 раз. в) Расстояние 3 м между точками K и L может быть в двух ситуациях. 1) Точка K находится в точке A, а точка L находится в точке B. Такая ситуация повторяется через каждые 6 с и за 3 мин повторится 31 раз. 2) Точка K находится в точке B, а точка L находится в точке A. Точка K приходит в точку B через $3 + 6n$ с (где n – натуральное число). А точка L приходит в точку A через $1{,}5 + 3m$ с (где m – натуральное число). Ясно, что ситуация, при которой точка K находится в точке B, а точка L находится в точке A никогда не реализуется. Значит, KL = 3 м за 3 мин 31 раз.

I.10. а) Пусть AB – подвижный отрезок, а CD – неподвижный. И пусть в начальный момент расположение точек на прямой такое: A, B, C, D. Встреча двух отрезков начинается тогда, когда точка B совпадает с точкой C. Заканчивается встреча, когда точка A совпадает с точкой D. Время встречи определяется тем временем, когда точка A сначала попадёт в точку C, а затем в точку D. Для этого она должна пройти расстояние, равное сумме длин этих отрезков, т. е. 3 м. Так как она двигается со скоростью 1 м/с, то искомое время составляет 3 с. б) Решение задачи сводится к предыдущему решению «а», если считать второй отрезок неподвижным, а скорость первого считать равной сумме скоростей, т. е. 3 м/с.

I.11. В случае «а» движения складываются и через 10 с длина OA = 10 см и длина AX = 10 см; поэтому OX = 20 см. В задаче «б» приходится рассматривать ещё и движение точки X относительно точки O на её пути от B к A, т. е. против хода отрезка. Эта скорость, согласно данным задачи, равна 0, т. е. относительно точки O точка X в таком движении неподвижна. Когда отрезок AB пройдёт 100 см (а это, согласно данным задачи произойдёт через 100 с) точка X пройдёт расстояние OX, равное 200 см. При этом она окажется в точке B и затем начнёт своё движение к точке A. Пока она 100 с двигается на отрезке AB к точке A, её расстояние до точки O не меняется и остаётся равным 200 см. Следующие 100 метров, оставшиеся до 300 м, точка X пройдёт, двигаясь снова от A к B с суммарной скоростью 2 м/с, т. е. за 50 с. Общее время равно 100 + 100 + 50 = 250 с.

I.12. а) 1 м в обоих случаях – эти дуги покроют всю окружность. в) Длина пересечения не меньше 0,8 м и не больше 0,9 м, а длина объединения не меньше 0,9 м и не больше 1 м.

I.13. а) Половину. б) Возможны два случая расположения точек A, B, C: рис 43, *а* и *б*. В первом случае (рис. 43, *а*) дуга AB составляет $\frac{5}{12}$ окружности, дуга AK – $\frac{5}{24}$ окружности, а дуга CAK равна $\frac{1}{4}+\frac{5}{24}=\frac{11}{24}$ окружности. Дуга CBK дополняет дугу CAK до полной окружности. Во втором случае (рис. 43, *б*) дуга AB составляет $\frac{1}{12}$ окружности, дуга AK – $\frac{1}{24}$ окружности, а дуга CAK равна $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$ окружности. Дуга CBK дополняет дугу CAK до полной окружности.

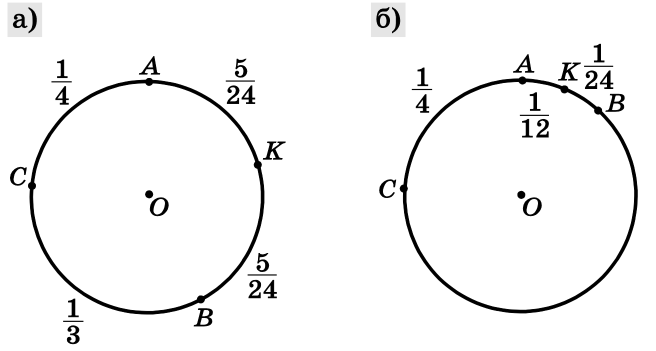


Рис. 43

I.14. а, б) Дуга *PH* равна 0,35 окружности (рис. 44).

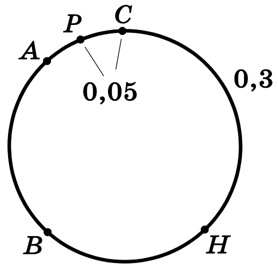


Рис. 44

I.15. Может быть два случая (рис. 45, *а*, *б*).

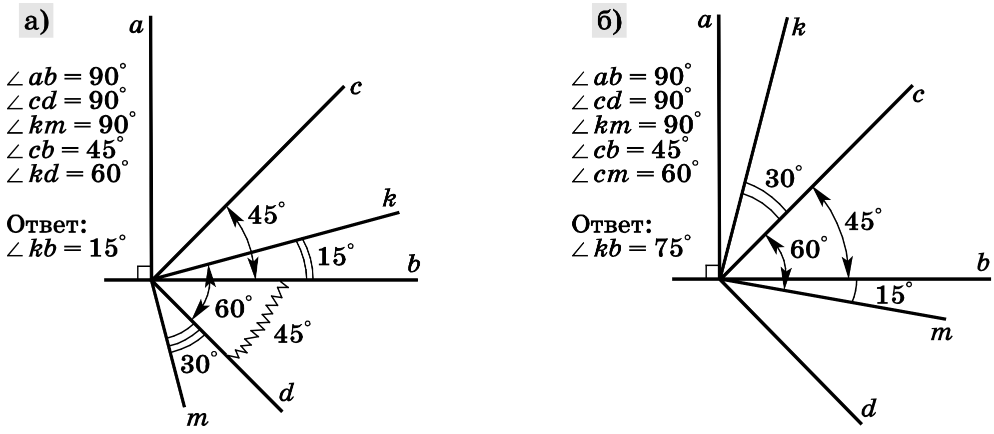


Рис. 45

I.16. а) Рис. 46, *а*. б) Рис. 46, *б*. в)Если γ – величина угла *dc*, где *d* – биссектриса угла *ab* (рис. 46, *в*, *г*), то $\gamma = |\beta \pm 0{,}5\alpha|$.

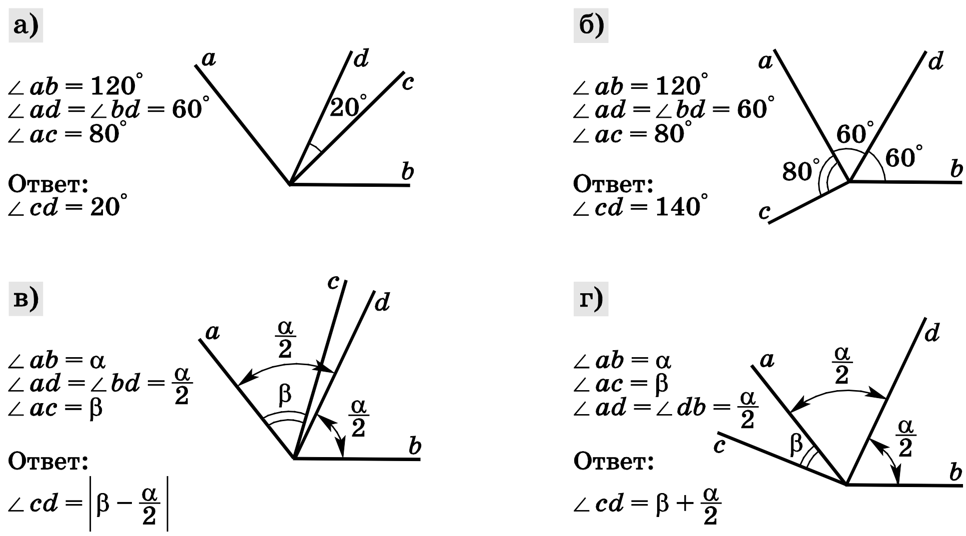


Рис. 46

I.17. В случаях «а» и «б» угол равен 80°. В случае «в» *c* – любой луч угла *ab*.

I.18. 90° ; 50°; 130°.

I.19. Наименьшее число областей для *n* окружностей равно *n* + 1. Наибольшее число для трех окружностей – 8, а для четырёх – 8 + 6 = 14 (рис. 47).

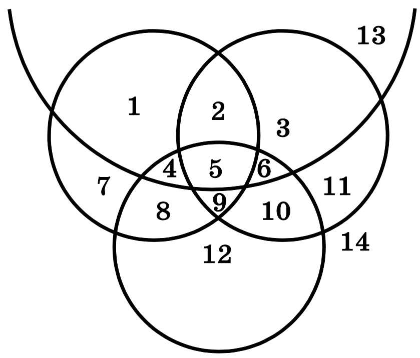


Рис. 47

I.20. а) На 3 или 4; б) 4, 5, 6, 7; в) наименьшее – 5, наибольшее – 11.

I.21. а) 3; б) 5; в) 3; г) 3 (рис. 48).

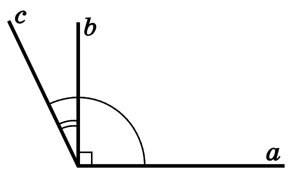


Рис. 48

I.22. а) Никакие три точки не должны лежать на одной прямой. б), в) Рис.

49.

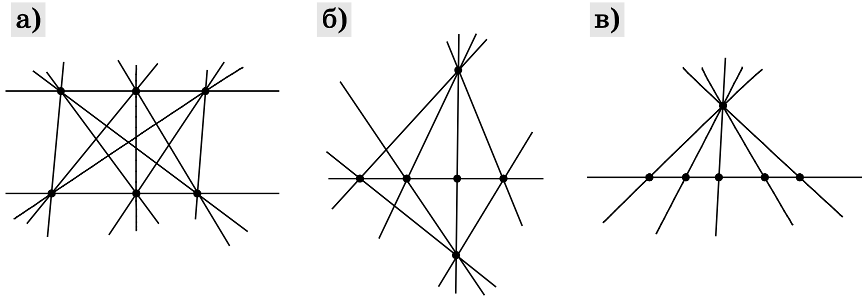
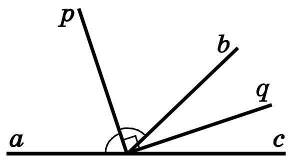


Рис. 49

I.23. а) Построить угол, равный 20°, как разность прямого угла и угла в 70°, а затем поделить его пополам. б) 7° = (90° – 34°) : 8. в) 65° = 20° + 90° : 2.

I.24. Рис. 50.



$$\angle ab = \alpha$$
$$\angle bc = 180^\circ - \alpha$$
$$\angle aq = \angle ap + \angle pq = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$$
$$\angle cq = 180^\circ - \angle aq = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$
$$\angle cq = \frac{1}{2}\angle bc$$

Рис. 50

I.25. Пусть лучи на плоскости идут в таком порядке: *a*, *b*, *c*, *d*. При этом углы *ab* и *cd* – прямые, причём лучи *a* и *d* не лежат на одной прямой. Пусть *m* – биссектриса угла *bc*, а *n* – биссектриса угла *da*. Имеем $\angle mn = \angle mb + \angle ba + \angle an = 0{,}5\angle bc + \angle ba + 0{,}5\angle ad = 90° + 0{,}5(\angle bc + \angle ad) =$ $90° + 0{,}5(360° - \angle ab - \angle cd) = 90° + 0{,}5(360° - 180°) = 180°$.

I.26. Три прямые могут разбить плоскость на 7 частей (рис. 51, *а*). *Четвёртая* прямая, которую пересекают три исходные прямые, точками пересечения с ними будет разбита на *четыре* части и к уже имеющимся семи частям добавятся ещё *четыре*, т. е. станет 7 + 4 = 11 частей. Аналогичное рассуждение можно провести, если добавить *пятую* прямую: тогда станет 11 + 5 = 16 частей (рис. 51, *б*). Отметим ещё, что проводя первую прямую, мы увеличили число частей на 1, проводя вторую – на 2, проводя третью – на 3. А для *n* прямых наибольшее возможное число частей равно 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + *n*, т. е. 1 + 0,5*n*(*n* + 1).

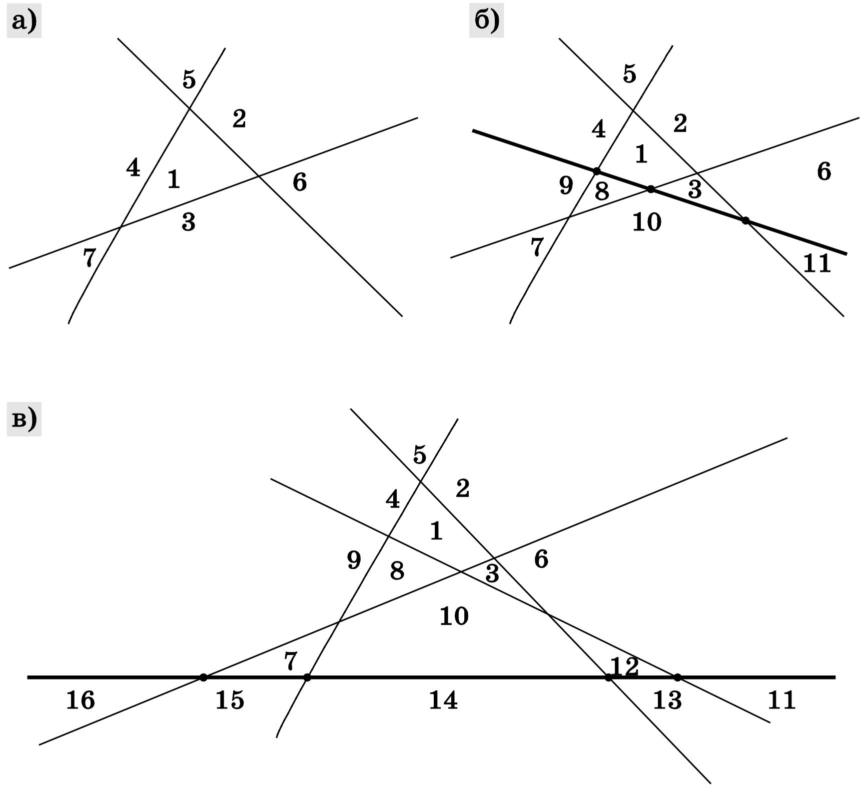


Рис. 51

I.27. Биссектриса является продолжением одного из имеющихся лучей.

I.28. Из одного утверждения не следует и из двух тоже (рис. 52).

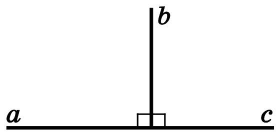


Рис. 52

I.29. а, б) Взаимно перпендикулярные прямые; в) это возможно для невыпуклых углов (рис. 53).

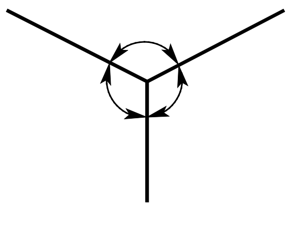


Рис. 53

I.30. Рис. 54.

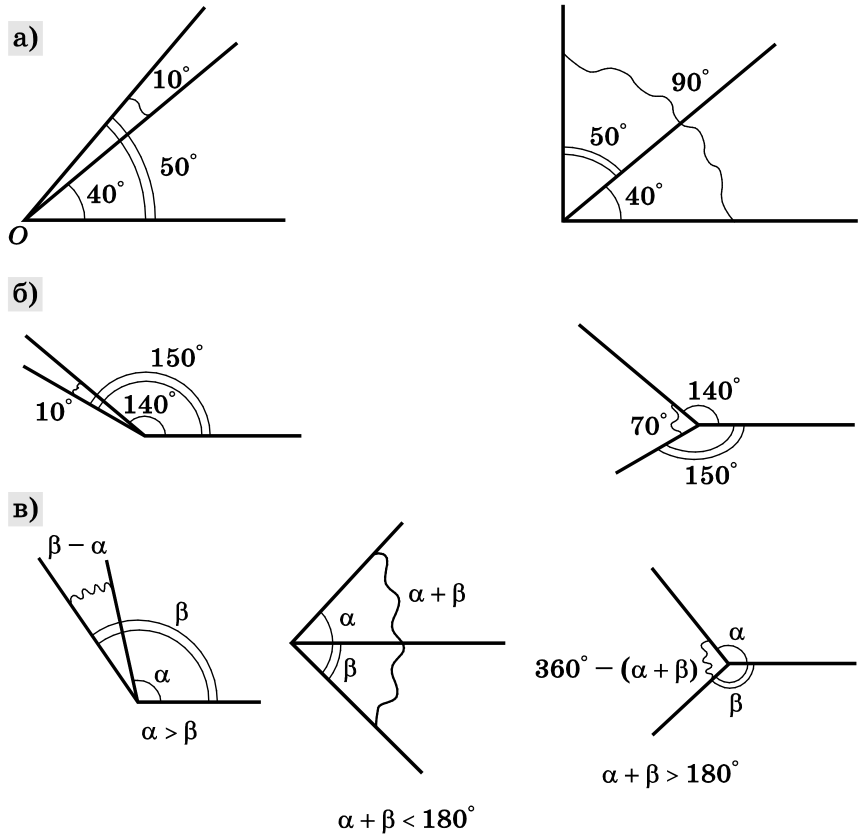


Рис. 54

I.31. Оба неправы. Результат зависит от расположения углов относительно данного отрезка: лучи этих углов могут находиться с одной стороны от него, а могут и с разных сторон от него. Соответственно этому будут получаться разные ответы. Необходимо рассматривать оба случая.

I.32. а) Полученные точки *A* и *B* будут центрально симметричны относительно точки *O* пересечения этих прямых. Этот результат можно получить, доказав, что угол между лучами *OA* и *OB* – развёрнутый. Равенство отрезков *OA* и *OB* можно будет доказать позже. б) Полученные отрезки будут центрально симметричны относительно точки *O* пересечения этих прямых. Центральная симметричность их концов получается сразу, а центральную симметричность их внутренних точек можно будет доказать позже.

I.33. Можно (рис. 55).

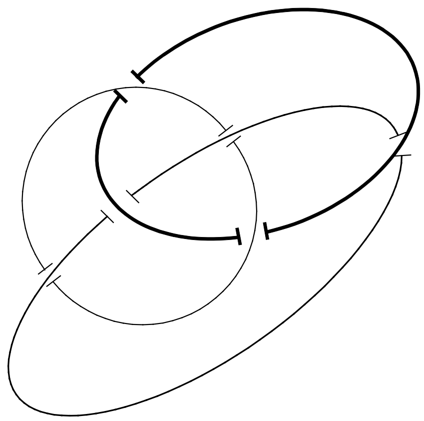


Рис. 55

I.34. Задача может быть решена, исходя из наглядных или практических соображений. Из наглядных соображений решение может быть, например, таким. Нарисуем вокруг данной окружности шесть таких же, имеющих с данной одну общую точку. Затем проведём два отрезка, соединяющих противоположные точки касания. Другой способ – двукратное перегибание рисунка так, чтобы окружность самосовместилась.

I.35. Траектория зависит от направления удара. Если удар будет направлен в середину соседней стороны, то шар вернётся в первоначальную точку.

I.36. Это случалось тогда, когда угол поворота был один и тот же и равнялся $180°(1 - \frac{2}{n})$, где n – целое число, большее двух (это угол правильного многоугольника). Простейший пример, когда $n = 3$ и угол поворота равен 60°. Для $n = 4$ имеем 90°.

I.37. а) 6°; б) 30°, 75°, 172,5°, 2,5°, 96° – 0,5° = 95,5°; в) 13.00; в 14.00 угол был равен 60°, за 1 мин он сокращается на 5,5°; чтобы угол сократился на 15° должно пройти 15 : 5,5 мин, т. е. угол 45° будет в 14 ч $\frac{30}{11}$мин; 14.00; 15.00; 20.00; для угла в 135° следует провести аналогичное рассуждение, отсчитывая по 5,5° за минуту после 20.00; 21.00; 18.00.

I.38. Каждая стрелка (минутная и часовая) движутся равномерно. Поэтому минутная относительно часовой движется равномерно. В такой ситуации мы можем считать, что часовая стрелка *неподвижна, а минутная движется со* *скоростью, равной разности скоростей этих стрелок.* Фиксируем положение часовой стрелки в 12.00, и будем считать, что минутная стрелка находится в положении 9.00. Острый угол минутная стрелка со стоящей в положении 12.00 часовой стрелкой образует от 9.00 до 3.00. Тупой же угол она образует от 3.00 до 9.00. Поскольку в эти промежутки минутная стрелка проходит одинаковый путь, то затраченное время в обоих случаях одно и то же.

I.40. а, б) 45°; в) 135°; г) 90°; д) 180°; е) 90°.

I.41. *Указание:* для изменения расположения прямой достаточно перемещать одну из задающих её точек.

I.42. *Указание:* середину отрезка нужно строить с помощью последовательного выполнения двух команд: «Построения» и «Середина», предварительно выделив внутреннюю часть отрезка с помощью мыши. Для измерения расстояния между точками воспользуйтесь последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Расстояние», предварительно выделив обе точки с помощью мыши.

I.43. *Указание:* биссектрису угла нужно строить с помощью последовательного выполнения двух команд: «Построения» и «Биссектриса», предварительно выделив сначала точку на одной стороне угла, далее вершину, и, наконец, точку на другой стороне угла с помощью мыши. Для измерения угла воспользуйтесь последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Угол», предварительно выделив сначала точку на одной стороне угла, далее вершину, и, наконец, точку на другой стороне угла с помощью мыши.

Глава II. Треугольники

§ 4. Первые теоремы о треугольниках

4.5. Следствие определения центральной симметрии, свойства вертикальных углов и первого признака равенства треугольников (рис. 56).

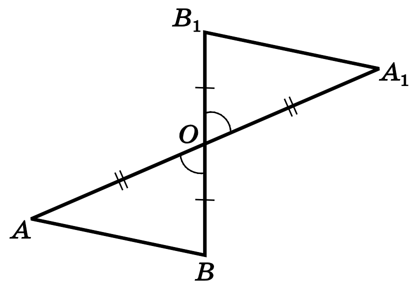


Рис. 56

4.6. У центрально-симметричных треугольников соответственные стороны равны (по задаче 4.5). Следовательно, такие треугольники равны (рис. 57).

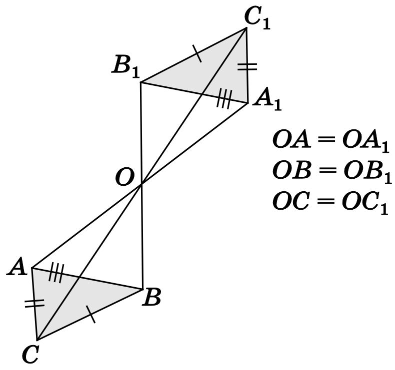


Рис. 57

4.9. В учебнике на рис. 155 три четырёхугольные пирамиды с вершиной в точке A: $ACDD_1C_1$, ACC_1B_1B, $AA_1B_1C_1D_1$. Равны друг другу их основания – квадраты, шесть треугольников, на которые диагонали AD_1, AC, AB_1 граней куба разбивают эти грани, также $\Delta AD_1C_1 = \Delta AB_1C_1 = \Delta ACC_1$ (рис. 58).

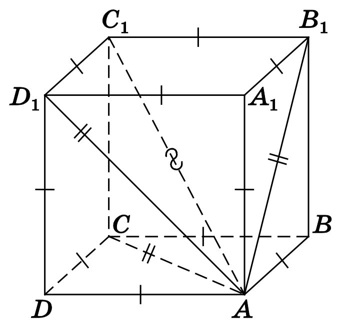


Рис. 58

4.14. а) $AC = BC$, так как $\Delta BOC = \Delta AOC$ (по теореме 1, рис. 59, *а*). б) $\angle OCA = \angle OCB$ как соответственные углы равных треугольников BOC и AOC (по теореме 2). в) Пусть K – точка пересечения отрезка AB с лучом OC (рис. 59, *б*). Тогда $\Delta ACK = \Delta BCK$ (по теореме 1). Поэтому $\angle AKC = \angle BKC$ (по теореме 2). Так как эти углы смежные, то они – прямые, т. е. $AB \perp CO$.

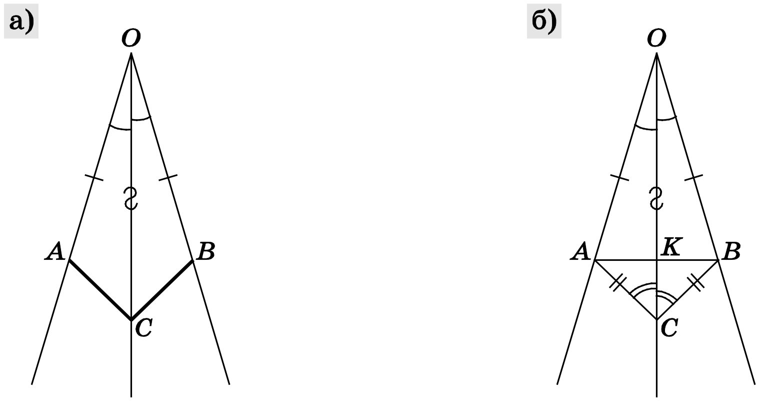


Рис. 59

4.15. Равенство углов AOB и COD следует из равенства треугольников AOB и COD.

4.16. Пусть S – окружность с центром O, AB – диаметр этой окружности и е` точки K и M равноудалены от точки A: $AK = AM$ (рис. 60, *а*). Проведём радиусы OA и OB, а также хорды BK и BM (рис. 60, *б*).

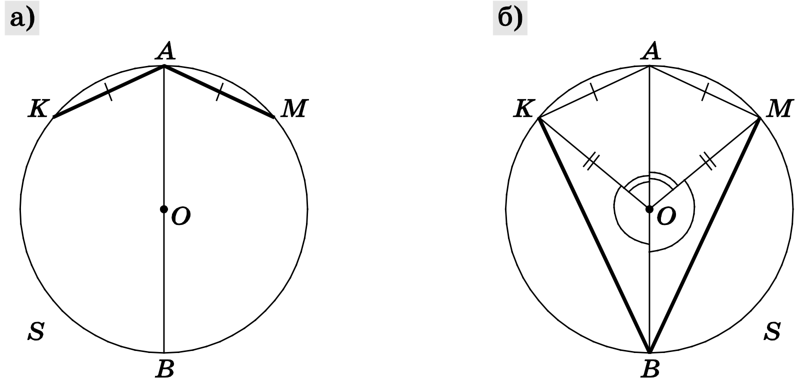


Рис. 60

$\Delta OAK = \Delta OAM$ (по трём сторонам). Поэтому $\angle AOK = \angle AOM$ (по теореме 2) и $\angle KOB = \angle MOB$ (как смежные с равными углами AOK и AOM). Поэтому $\Delta BOK = \Delta BOM$ (по теореме 1) и $BK = BM$.

4.17. Возможны два случая расположения хорд AK и BP (рис. 61, *а*, *б*). Проведём радиусы OK и OP и рассмотрим треугольники AOK и BOP. Они равны (по трём сторонам). Поэтому $\angle KAB = \angle PBA$. Проведём хорды AP и BK (рис. 62, *в*, *г*). Треугольники ABP и ABK равны (по теореме 1). Поэтому $AP = BK$.

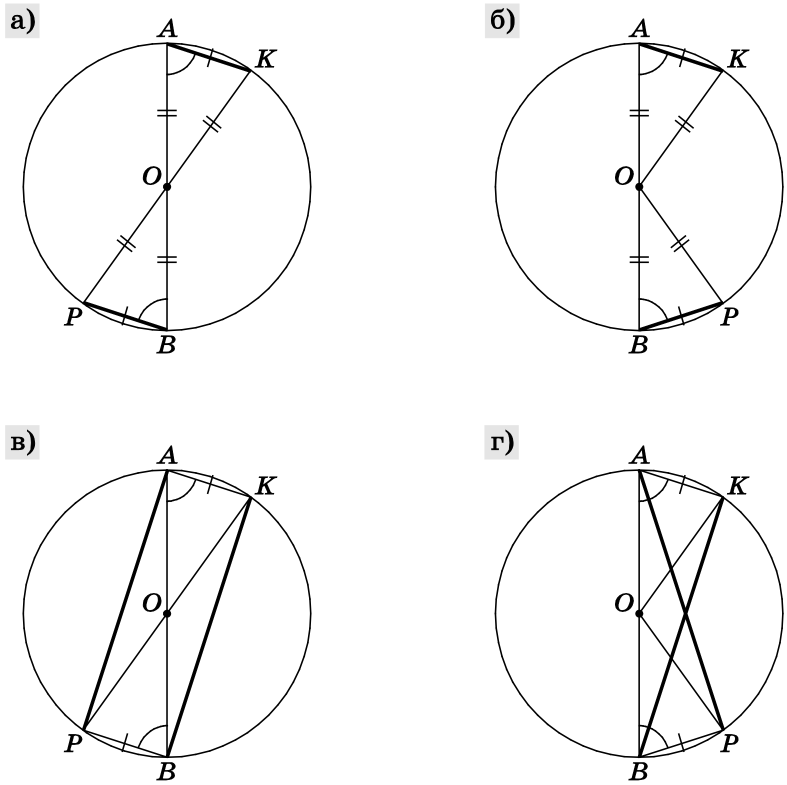


Рис. 61

4.18. Следствие первого признака равенства треугольников.

4.19. Угол A треугольника ABC в сумме со смежным с ним внешним углом α равен 180°: $\angle A + \alpha = 180°$ (рис. 62). По теореме 3 $\angle B < \alpha$. Поэтому $\angle A + \angle B < 180°$.

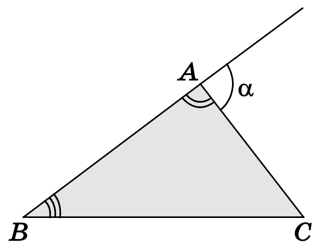


Рис. 62

4.21. а) По числу сторон: треугольники, четырёхугольники и т. д.; б) острые, прямые, тупые, развёрнутые; в) по числу граней.

4.25. Так как сумма любых двух углов треугольника меньше 180°, то эти углы могут быть лишь острыми. Третий угол треугольника может быть любым углом. Если же все углы треугольника равны, то эти углы острые.

4.30. Интуитивно ясно, что при возрастании длины отрезка BX длина отрезка AX также возрастает. Доказать это можно после изучения теорем о сравнении сторон и углов треугольника (§ 5).

4.31. На плоскости два отрезка, перпендикулярные третьему отрезку, либо лежат на одной прямой, либо лежат на параллельных прямых. В пространстве эти прямые могут также и пересекаться, и не лежать в одной плоскости (рис. 63).

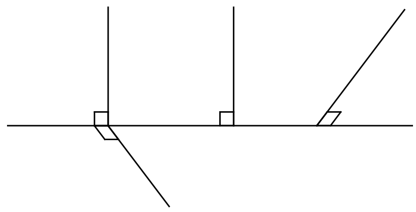


Рис. 63

4.38. Этот треугольник – равнобедренный. Действительно, если высота BK треугольника ABC является и его биссектрисой, то она разбивает этот треугольник на два прямоугольных треугольника ABK и CBK. Эти треугольники имеют общий катет BK и две пары соответственно равных углов, прилежащих к BK. Поэтому $\Delta ABK = \Delta CBK$ (по второму признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB = CB$.

4.39. Рис. 64.

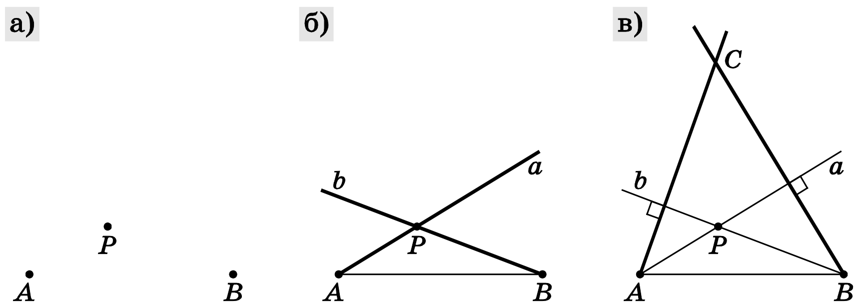


Рис. 64

4.40. Пусть в треугольнике ABC углы A и B – острые. Тогда высота CK треугольника ABC лежит внутри этого треугольника (рис. 65, *а*). Если допустить противное, то приходим к противоречию: один из углов A или B должен быть тупым, так как смежным с ним будет острый угол прямоугольного треугольника (рис. 65, *б*). Поэтому все высоты остроугольного треугольника идут внутри него. Обратное: если высота CK идёт внутри треугольника, то углы A и B этого треугольника – острые углы прямоугольных треугольников *CKA* и *CKB*. Следовательно, высота, проведённая к той стороне треугольника, у которой один из прилежащих углов – тупой, идёт вне треугольника (рис. 65, *в*). А в тупоугольном треугольнике таких сторон – две.

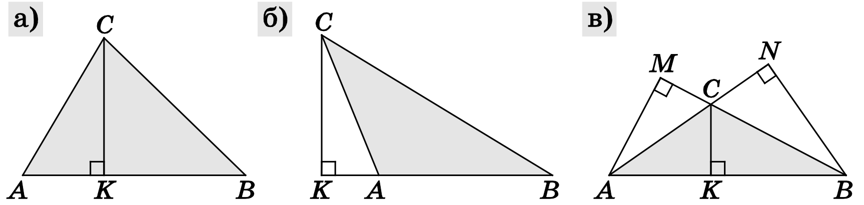


Рис. 65

4.41. Для прямоугольного.

§ 5. Сравнение сторон и углов треугольника

5.1. Если в треугольнике *ABC* медиана *AM* является и высотой (рис. 66), то $\Delta AMB = \Delta AMC$ (по двум катетам) и потому $AB = AC$.

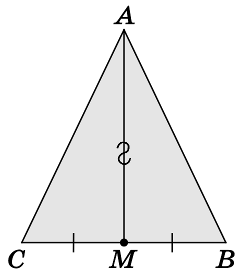


Рис. 66

5.3. Рис. 67 и 68.

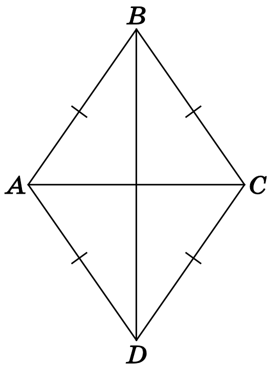


Рис. 67

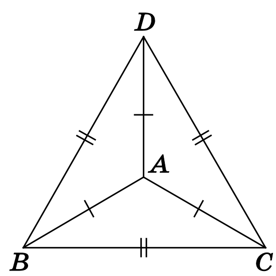


Рис. 68

5.4. Рис. 69.

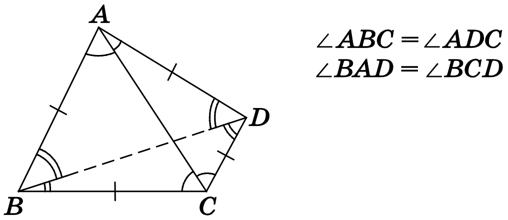


Рис. 69

5.5. Хорды одной окружности постоянной длины – это основания равнобедренных треугольников, боковыми сторонами которых являются радиусы этой окружности. Медианы этих треугольников, соединяющие центр окружности с серединами оснований, имеют равные длины. Поэтому все эти середины заполнят окружность, концентрическую с данной окружностью.

5.7. а) Если x – длина основания, то $x + 5$ – это боковая сторона, а потому $x + 2(x + 5) = 100$ и $x = 30$ (см); б) $x + 2x + 2x = 100$, $x = 20$ (см); в) $x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x = 100$, $x = \frac{300}{7}$ (см).

5.8. а) Пусть периметр равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) равен 12 см, а медиана $AM = 1$ см. Тогда сумма периметров треугольников AMB и AMC больше периметра треугольника ABC на $2AM$, т. е. равна 14 см. Поэтому периметр каждого из них равен 7 см. б) Можно, например, задать периметры треугольников ABC и AMB и попросить найти медиану AM.

5.13. В равнобедренном треугольнике такое разбиение производит медиана, проведённая к основанию. Пусть стороны треугольника ABC равны a, b, c. Из вершины A проведём хорду AM треугольника ABC и положим $BM = x$. Периметры треугольников AMB и AMC будут равны, если $AB + BM = AC + CM$, т. е. $c + x = b + a - x$. Из этого уравнения находим, что $x = 0{,}5(a + b - c)$. Соответствующая хорда AM и даёт ответ на вопрос.

5.15. Можно сослаться на аксиому о свойстве равных углов.

5.16. Треугольник мог быть равнобедренным, а медиана и биссектриса были проведены к его боковой стороне.

5.17. Треугольник, одна вершина которого лежит в центре окружности, а две другие вершины лежат на окружности, равнобедренный. Поэтому центр окружности равноудалён от концов хорды и лежит на серединном перпендикуляре хорды этой окружности (согласно признаку серединного перпендикуляра).

5.18. Прямые, содержащие высоты равностороннего треугольника *ABC,* являются серединными перпендикулярами его сторон. Точки каждой такой прямой равноудалены от двух вершин равностороннего треугольника. Поэтому точка *O* пересечения серединных перпендикуляров сторон *AB* и *BC* равноудалена от всех трёх вершин треугольника *ABC*: $OA = OB = OC$. Следовательно, серединный перпендикуляр и стороны *AC* пройдет через точку *O*.

5.19. Те же самые рассуждения, что и в предыдущей задаче.

5.20. Эти серединные перпендикуляры являются медианами изображений граней *PAB, PBC* и *PAC* пирамиды *PABC*.

5.21. Центр окружности равноудалён от концов любой её хорды. Поэтому серединные перпендикуляры этих хорд содержат центр окружности, т. е. все они проходят через центр окружности.

5.22. а), б) $\angle OXA = \angle OXB$ и $\angle OAX = \angle OBX$ как соответственные углы равных прямоугольных треугольников *AOX* и *BOX*; в) $\angle XAK = \angle XBK$ как соответственные углы равных треугольников *XAK* и *XBK*.

5.23. а) В равнобедренном треугольнике *XAB* угол *A* равен углу *B*. Треугольники *AXK* и *BXT* равны (по теореме 1). Поэтому $XK = XT$. б) В равнобедренном треугольнике *HKT* угол *HKT* равен углу *KTH*. Поэтому равны смежные им углы: $\angle HKA = \angle HTB$. Следовательно, равны треугольники *HKA* и *HTB* (теорема 1). Поэтому $HA = HB$.

Можно было бы рассуждать и так: у отрезков *AB* и *HK* общая середина, а потому у них общий серединный перпендикуляр и его точки равноудалены как от концов одного отрезка, так и от концов другого.

5.24. а) Пусть прямая *b* – серединный перпендикуляр отрезка *AB*. Для расположения прямых *a* и *b* есть три возможности: 1) они пересекаются и тогда на *a* есть единственная точка, равноудалённая от точек *A* и *B*; 2) прямые *a* и *b* параллельны и тогда такой точки нет; 3) a и b совпадают и тогда все точки прямой a равноудалены от A и B. Случаи б) и в) исследуются аналогично.

5.25. Свои предположения о том, что точка, равноудалённая от всех вершин треугольника, лежит внутри остроугольного треугольника, на гипотенузе прямоугольного треугольника и вне тупоугольного треугольника ученики пока обосновать не могут – для этого нужна аксиома параллельности или какой-либо её эквивалент (например, утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°).

5.26. Да, для этого надо построить с одной стороны от прямой AB две точки, равноудалённые от точек A и B.

5.27. Да, они лежат на серединном перпендикуляре отрезка AB.

5.28. Если бы точка X лежала на прямой p, то выполнялось бы равенство $XA = XB$, что противоречит условию задачи. Поэтому точка X не лежит на прямой p.

5.29. Утверждения, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является его биссектрисой и высотой, являются свойствами равнобедренного треугольника и доказаны в теореме 4. Докажем обратные им утверждения, которые являются признаками равнобедренного треугольника. а) Пусть в треугольнике ABC медиана AM является также и биссектрисой (рис. 70, *а*). Продолжим AM за точку M на отрезок MK, равный AM, и проведём отрезок BK (рис. 70, *б*).

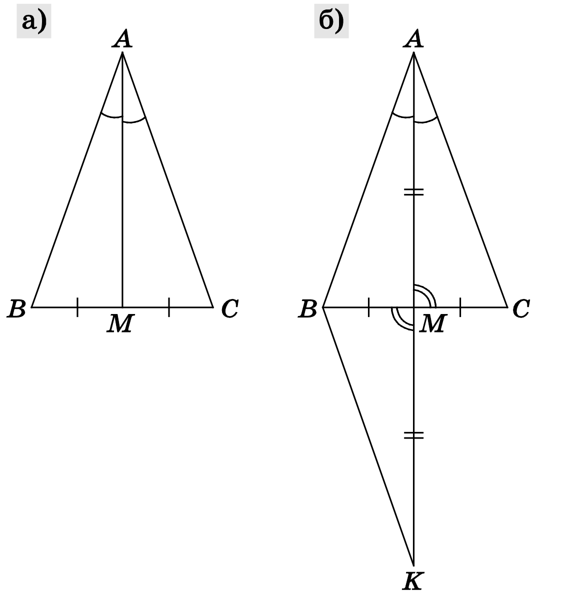


Рис. 70

Треугольники *AMC* и *KMB* равны по первому признаку. Поэтому *BK* = *AC* и $\angle CAM = \angle BKM$. Но $\angle CAM = \angle MAB$. Значит $\angle MAB = \angle MKB$ и треугольник *ABK* – равнобедренный (по теореме 5). Получили, что *AB* = *BK*. А так как *BK* = *AC*, то *AB* = *AC*.

б) Если в треугольнике *ABC* биссектриса *AM* является и высотой (рис. 71), то треугольники *AMB* и *AMC* равны по второму признаку равенства треугольников, а потому *AB* = *AC*.

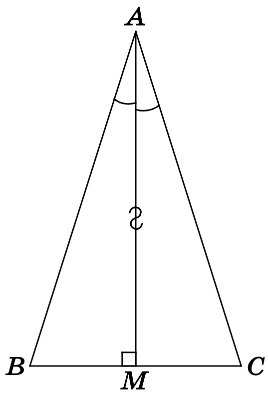


Рис. 71

в) Прямоугольные треугольники *AMB* и *AMC* равны по двум катетам, а потому *AB* = *AC*.

5.30. Если углы – вертикальные, то они равны. Обратное утверждение (если углы равны, то они вертикальные) неверно.

5.31. Пусть диагонали AC и BD прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 72).

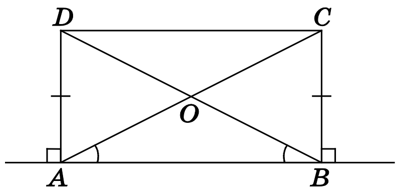


Рис. 72

Прямоугольные треугольники DAB и ABC равны (по двум катетам). Поэтому $\angle DBA = \angle CAD$. Следовательно, в треугольнике OAB два равных угла и по теореме 5 он равнобедренный: $OA = OB$. Аналогично доказываем равенства $OB = OC$, $OC = OD$. Поэтому $OA = OC$ и $OB = OD$.

5.32. Вытекает из определения центральной симметрии и из предыдущей задачи.

5.38. $\Delta ABM = \Delta ACK$ (по первому признаку). Поэтому $\angle ABM = \angle ACK$. А тогда углы OBC и OCB равны (как разности равных углов). Поэтому треугольник OBC равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

5.39. Доказательство аналогично доказательству в предыдущей задаче.

5.40. Если AX – высота, то $AX < AB$ и $AX < AC$. Если AX не перпендикулярно BC, то один из углов AXB или AXC – тупой. Пусть, например, $\angle AXB$ – тупой. Тогда $AX < AB$ (согласно теореме 6). Если $\angle AXC$ – тупой, то $AX < AC$.

5.41. Проведём отрезок AY. Тогда, согласно предыдущей задаче, отрезок XY меньше одного из отрезков AY или BY. Отрезок BY меньше BC. А отрезок AY меньше одной из сторон AB или AC. Отсюда и следует, что XY меньше одной из сторон треугольника ABC.

5.42. а) Наибольший угол A, наименьший угол C; б) углы B и C равны и меньше угла A; в) углы A и B равны и больше угла C.

5.43. В треугольнике ABC: а) $BC < AB < AC$; б) $AB = BC < AC$; в) $AB = AC = BC$.

5.44. а) Треугольник ABC – равнобедренный и его основание AC больше его боковых сторон. Поэтому угол B больше равных друг другу углов A и C; б) Наибольшей является сторона AB, а потому наибольшим является угол B. Какой угол наименьший, сказать нельзя.

5.45. а) Треугольник PMK – равнобедренный ($MK = PK$) и основание MP – наименьшая сторона; б) наибольший угол – $\angle K$, наименьший угол – $\angle M$; поэтому наибольшая сторона – PM, а наименьшая сторона – PK.

5.46. а) Наименьший отрезок – ребро куба, а наибольший – диагональ куба; б) наименьший отрезок – это ребро 2, а наибольший – это диагональ параллелепипеда.

5.47. А, В, Е, Ж, З, К, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Э, Ю (полагаем, что эти буквы без завитков на концах).

5.48. 3, 8, 0.

5.53. а) Тоже по часовой стрелке; б) против часовой стрелки.

5.54. Диагонали квадрата $ABCD$ равны друг другу, взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O, которая делит их пополам. Поэтому точки A и C, стороны AB и CB, а также стороны AD и CD симметричны относительно диагонали BD.

5.55. Вершины квадрата попарно симметричны относительно такого перпендикуляра.

5.56. Это прямая, проходящая через центры этих окружностей.

5.57. Рис. 73, *а* к задаче «а» и рис. 73, *б* к задачам «б» и «в».

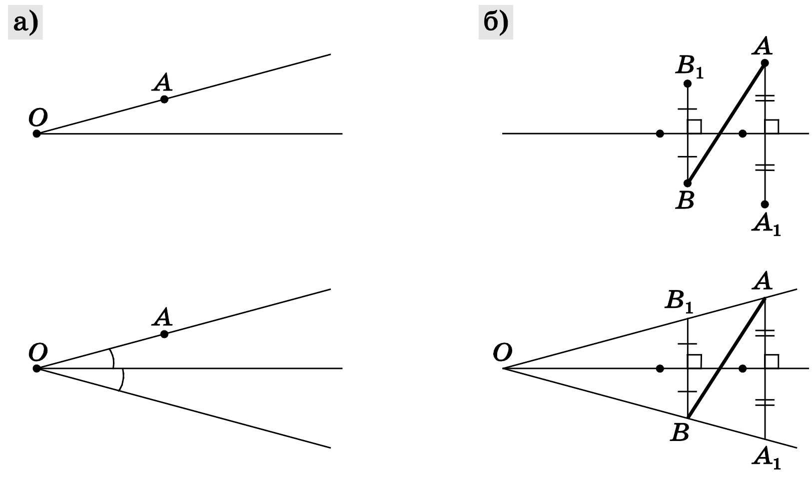


Рис. 73

Задачи к главе II

II.1. Вершинами правильного тетраэдра являются концы непараллельных диагоналей двух параллельных граней куба.

II.3. Каждая из вершин этих трёх равнобедренных треугольников лежит на серединном перпендикуляре общего основания треугольников, так как она равноудалена от его концов.

II.4. а) $2x + (x + 12) = 100,\ x = 29\frac{1}{3}$.

II.7. а) 1 м через 1 с, 1,5 м через 1,5 с, 1 м через 2 с, 1 м через 10 с; б) $t = 10/100 = 0{,}1$ с, $t = 20/100 = 0{,}2$ с.

II.8. Достаточно одну из сторон разделить на равные части и соответствующую сторону второго треугольника разделить на столько же равных частей. Затем противоположную этой стороне вершину каждого треугольника соединить со всеми точками деления.

II.9. а) Равенство биссектрис вытекает, например, из второго признака равенства треугольников. б) Если бы в главе 2 уже была доказана теорема о сумме углов треугольника, то равенство высот тоже следовало бы из второго признака равенства треугольников. А именно, равенство высот вытекало бы из признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Но этот признак можно доказать и без теоремы о сумме углов треугольника. Сделаем это.

Пусть в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны гипотенузы AB и A_1B_1, а также острые углы A и A_1. Покажем, что $AB = A_1B_1$. Допустим, что это не так. Отложим на луче AB отрезок AK, равный A_1B_1. Точка K не совпадает с точкой C. Треугольник ABK равен треугольнику $A_1B_1C_1$ (по первому признаку). Следовательно в нём угол K – прямой. Но тогда из точки B на прямую AC опущены два перпендикуляра BC и BK, что невозможно. Мы пришли к противоречию. Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу доказан.

II.10. Треугольники равны: а) по .определению; б) по первому признаку;

в) по второму признаку; г) по второму признаку.

II.11. а), б) Треугольники OAP и OBP – равносторонние. б) Из равенства треугольников OAP и OBP будет верным равенство $\angle OAP = \angle OBP$.

II.12. а), б) Оба эти утверждения вытекают из равенств $KA = KB = HA = HB$; в) Если окружности не равны, то $KA \neq HA$, но $KA = KB$ и $HA = HB$, а потому K и H – точки серединного перпендикуляра отрезка AB, т. е. прямая KH – серединный перпендикуляр отрезка AB.

II.13. Полагаем, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AO. Имеем равенства треугольников: $\Delta OAB = \Delta OAB_1$ и $\Delta OAC = \Delta OAC_1$. Углы, равенства которых следует установить в пунктах «б» и «в» являются разностями и суммами соответственно равных углов этих треугольников. Равенство $BC = B_1C_1$ вытекает из равенства треугольников ABC и AB_1C_1.

II.14, II.15. Задача II.14 является частным случаем задачи II.15, так в равностороннем треугольнике высоты лежат на серединных перпендикулярах его сторон, а также высоты равностороннего треугольника равны друг другу (задача II.9). Уже доказано, что серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке (задача 5.19). Эту точку для равностороннего треугольника ABC обозначим через O. Пусть точки K, L, M – середины его сторон CB, CA, AB соответственно. Прямые AK, BL и CM являются серединными перпендикулярами сторон треугольника ABC и пересекаются в точке O. Поэтому $OA = OB = OC$. Из равенства равнобедренных треугольников OAB, OBC и OAC следует, что равны их углы: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ – и равны их высоты: $OK = OL = OM$. Проведём равные друг другу перпендикуляры KA_1, LB_1 и MC_1 к сторонам треугольника во внешнюю сторону. Имеем $OA_1 = OK + KA_1$, $OB_1 = OL + LB_1$, $OC_1 = OM + MC_1$. Так как в этих суммах первые слагаемые равны друг другу, а также вторые слагаемые равны друг другу, то $OA_1 = OB_1 = OC_1$. Угол A_1OB_1 – вертикальный с углом AOB, а потому он равен 120°. Аналогично, $\angle B_1OC_1 = \angle A_1OC_1 = 120°$. Поэтому равны треугольники A_1OC_1, C_1OB_1, B_1OA_1, из чего следует равенство сторон треугольника $A_1B_1C_1$.

II.16. а) Прямоугольные треугольники PAB и PAC равны. Поэтому $PB = PC$. б) Для этого достаточно, чтобы $PA = AB$ и угол BAC был прямым.

II.17. Треугольники AKP и AKB равны по первому признаку. Поэтому $KP = KB$.

II.18. а) Это соответственные медианы в равных треугольниках PAB, PAC, PBC; б) $BK = CK$ при любом положении точки K на ребре PA, так как треугольники PBK и PCK равны при любом положении точки K на ребре PA; в) $CK = CM$ как соответственные медианы в равных треугольниках PAC и PBC; г) если K – середина PA, M – середина PB, H – середина PC, то треугольники PKM, PMH и PHK равны, а потому $KM = MH = HK$.

II.19. До аксиомы параллельности (или теоремы о сумме углов треугольника) доказать утверждения о положении точки, равноудалённой от вершин треугольника, нельзя.

II.20. а) Пусть X_1 и X_2 – два положения точки X, причём $OX_2 > OX_1$. Так как угол OX_1A – внешний угол треугольника X_1AX_2, то он больше угла OX_2A. Поэтому угол, под которым виден отрезок OA при удалении точки X от точки O, убывает. б) Из теоремы о внешнем угле треугольника вытекает, что тот угол, который имеет вершину в удаляющейся точке, убывает, а угол, который имеет вершину в точке, двигающейся к точке O, возрастает.

II.21. В задаче ставится вопрос о нескольких признаках равенства треугольников. Ответ будет отрицательным, если приводится пример двух треугольников, у которых названные элементы (стороны, углы, медианы, высоты, биссектрисы) соответственно равны, а сами треугольники не равны. Формулировка этой задачи могла бы быть и такой: единственно ли решение задачи на построение треугольника по указанным элементам. Если это построение не однозначно, то признак места не имеет. Обсудим эти признаки. а) Вообще говоря, нет, не равны (рис. 74); но если что-то еще дополнительно указано (например, что угол прямой или тупой), то такие треугольники будут равны.

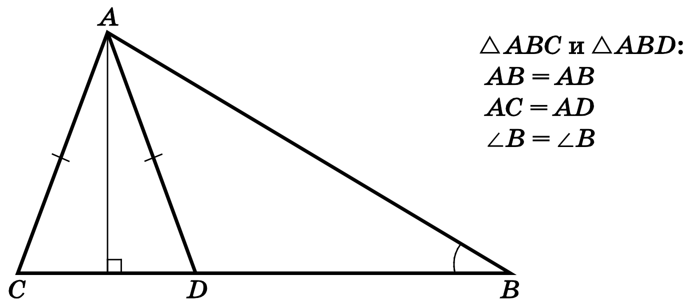


Рис. 74

б) Да, равны, но доказать это, применив второй признак равенства треугольников, можно после доказательства теоремы о сумме углов треугольника в § 8. в) Да, равны; третья их сторона (точнее, её половина) является медианой в треугольнике, у которого две данные стороны, а третья сторона – удвоенная медиана (рис. 164, *б* учебника). г) Нет, не равны (рис. 74). д) Да, равны, но доказать это можно после того, как появится формула для площади треугольника. е) Нет, не равны. Если рассмотреть треугольник CA_1B с данным углом B и половиной данной стороны BA_2, который отсекает данная медиана CA_1 (рис. 75), то получим случай, рассмотренный в пункте «а».

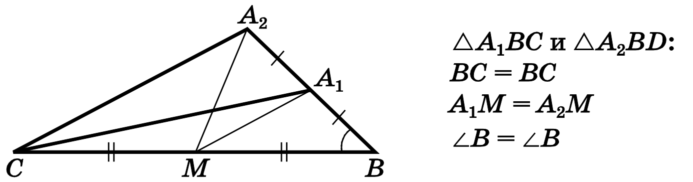


Рис. 75

ж) Нет, не равны. Обосновать это будет легче после того, как появится аксиома параллельности. Тогда в треугольнике AMC, который отсечёт медиана AM от треугольника ABC, высота будет равна половине высоты треугольника ABC (рис. 76, *а*).

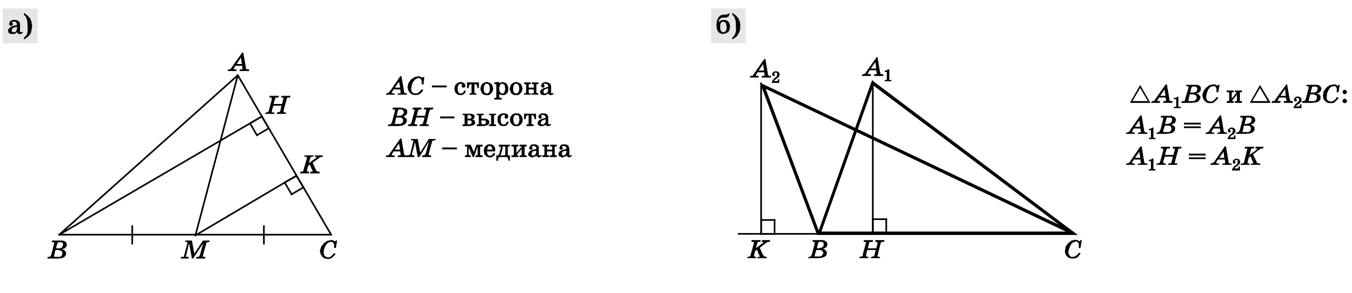


Рис. 76

Для построения треугольника ABC сначала надо построить треугольник AMC по двум сторонам AM и MC и высоте MK. А задача на построение такого треугольника не решается однозначно (рис. 76, *б*). з) Да, равны. Соответствующая задача на построение имеет единственное решение. и) Да, равны, но доказать это и решить соответствующую задачу на построение можно после теоремы о точке пересечения медиан треугольника. к) Поскольку в случае, когда высота, медиана и биссектриса равны друг другу (случай равнобедренного треугольника) таких треугольников бесконечное множество, то ответ отрицательный.

II.22. а, б) Можно.

II.23. *Указание:* для измерения угла воспользуйтесь последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Угол», предварительно выделив сначала точку на одной стороне угла, далее вершину и, наконец, точку на другой стороне угла с помощью мыши.

II.24. *Указание:* для измерения угла воспользуйтесь последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Угол», предварительно выделив сначала точку на одной стороне угла, далее вершину, и наконец, точку на другой стороне угла с помощью мыши.

Для измерения длины отрезка есть два способа: а) воспользоваться последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Расстояние», предварительно выделив оба конца отрезка с помощью мыши, б) воспользоваться последовательным выполнением двух команд: «Измерение» и «Длина», предварительно выделив внутреннюю часть отрезка с помощью мыши.

II.25. *Указание:* постройте точку D, симметричную точке A относительно прямой а, и воспользуйтесь тем, что длина отрезка AC равна длине отрезка DC.

Для построения точки D, симметричной точке A относительно прямой a, опустите перпендикуляр из точки D на прямую a с помощью последовательного выполнения двух команд: «Построение» и «Перпендикуляр», предварительно выделив прямую a и точку D с помощью мыши. Затем отложите от основания перпендикуляра отрезок, длина которого равна длине перпендикуляра, с помощью последовательного выполнения двух команд: «Построение» и «Окружность по центру и радиусу», предварительно выделив основание перпендикуляра и сам перпендикуляр с помощью мыши. В условии задачи переместите точки *A* и *B*. Проверьте, что ваше построение по-прежнему даёт верное решение задачи.

Примечание: эта задача, кроме упражнения на осевую симметрию, является подготовкой к изучению темы «Неравенство треугольника».

Глава III. Расстояния и параллельность

§ 6. Расстояния между фигурами

6.1. Пусть в окружности с центром O проведена хорда AB и точка Q – её середина. Так как треугольник OAB равнобедренный, то OQ – его медиана, а потому – высота. Но тогда $OQ < OX$, где X любая точка хорды, отличная от Q.

6.6. Рис. 77.

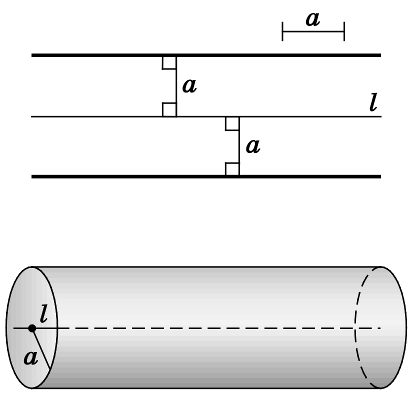


Рис. 77

6.7. Рис. 78.

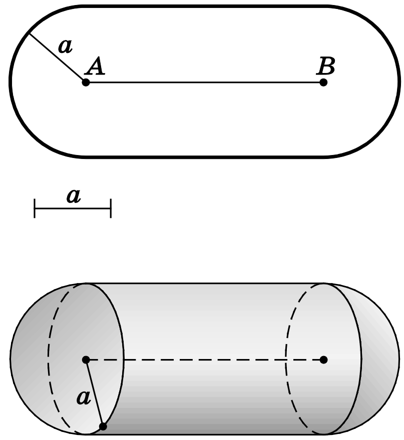


Рис. 78

6.8. Рис. 79.

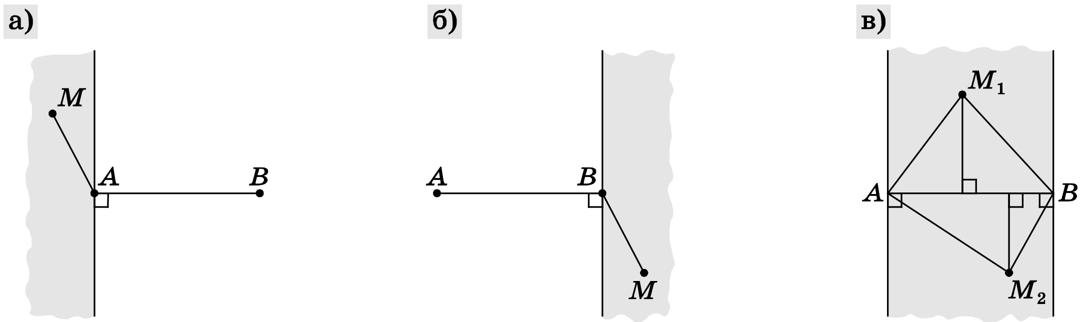


Рис. 79

6.9. Нарисуем на плоскости горизонтальную прямую a и выше неё окружность F с центром в точке O. Пусть точка X лежит на прямой a. Расстояние от X до F равно длине отрезка XY, где Y – точка пересечения отрезка OX с окружностью F. Когда точка X пробегает прямую a слева направо, то отрезок XY сначала убывает, становится минимальным, когда $OX \perp a$, и затем снова возрастает.

6.10. Такой фигурой будет вся плоскость, из которой удалён круг с центром в данной точке и радиусом данного расстояния. В пространственном случае удаляется шар.

6.11. а) К треугольникам AOB и BOB_1; б) к треугольнику AOB; в) расстояние от этой точки до всех треугольников одинаковое; г) к треугольнику A_1OB_1.

6.12. Надо взять меньшую из двух длин отрезков, указанных в условии.

6.13. б) Пусть AH, BK и CM – высоты треугольника $ABC.$ Так как $AH \leq AB$

и $AH \le AC$ и в одном из двух случаев имеет место строгое неравенство, $2AH < AB + AC$. Поэтому $AH < 0,5(AB + AC)$. Аналогично, $BK < 0,5(BA + BC)$ и $CM < 0,5(CA + CB)$. Складывая эти три неравенства, получаем, что $AH + BK + CM < AB + BC + AC$.

6.14. Высота пирамиды может либо совпадать с каким-либо ребром пирамиды, либо не совпадать с ним. В первом случае высота пирамиды равна ребру пирамиды, а во втором – меньше ребра, так как является катетом в прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого является ребро пирамиды.

6.15. Расстояния от центра окружности до любой точки окружности равно её радиусу, а потому все эти радиусы – кратчайшие отрезки от центра до окружности.

6.16. Нет. Окружность и её центр.

6.17. Да. Окружность (сфера) и её центр.

6.18. а) Да; б) нет; в) да.

6.19. Следует из неравенства треугольника и из свойств неравенств.

6.20. а) 15 или 18; б) 20.

6.21. Любым, большим 20.

6.22. Любым в интервале (20, 40).

6.23. а) $1 < x < 3$; б) $0 < x < 4$; в) $|a - b| < x < a + b$.

6.24. а) (30; 54); б) (28; 56); в) (28; 58).

6.25. а) Проводим отрезок CK и применяем неравенство треугольника к треугольнику ACK; б) проводим отрезок DB и применяем неравенство треугольника к треугольнику DBK; в) $AB = AK + KB$, $CK + KD = CD$, $AK < AC + CK$, $KB < KD + DB$; складывая последние два неравенства, получаем требуемое неравенство.

6.26. а) Применяем неравенство треугольника к треугольнику ACK; б) применяем неравенство треугольника к треугольнику BDK; в) перпендикуляры AB и DC на прямую BC короче наклонных AK и DK.

§ 7. Параллельность прямых

7.4. В ромбе $ABCD$ проведём диагональ AC. Из равенства равнобедренных треугольников ABC и ADC следует равенство накрест лежащих углов DAC и ACB. Поэтому $DA \| BC$. Аналогично, $AB \| DC$.

7.5. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC$, точки D и K – середины сторон AB и AC соответственно. Проведём биссектрису AM в треугольнике ABC. Прямая AM перпендикулярна прямым BC и DK (задача 5.29). Поэтому $BC \| DK$.

7.7. Углы между стрелками компасов и курсами кораблей должны быть равны.

7.8. В противном случае получаем два перпендикуляра, проведённые из одной точки к одной прямой, что невозможно (см. п. 4.6).

7.10. а) На три; б) на четыре; в) на пять; г) на одиннадцать.

7.11. 9.

7.12. Диаметр.

7.13. Они параллельны: в противном случае прямая, параллельная первой из них, пересекала бы вторую, но не пересекала бы первую.

7.14. Нет, не могут: если прямые a и b параллельны, то третья прямая c, пересекающая первую из них, должна пересекать и вторую.

7.15. Пятый постулат говорит об односторонних углах. Аналогично, можно говорить и о других углах. Например, если соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой, не равны, то первые две прямые не параллельны.

7.16. Нижний и верхний края листа перпендикулярны боковому краю, а потому параллельны.

7.17. Они параллельны потому, что две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

7.20. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с вершиной B точка K – середина стороны AB и $KL \| AC$. Тогда $\angle BKL = \angle BAC$, $\angle BLK = \angle BCK$, $\angle B = \angle A$, следовательно, $\angle K = \angle L$, откуда следует, что треугольник BKL равнобедренный, значит: $BL = BK = 0{,}5BA = 0{,}5BC$.

7.21. а) Пусть AB – диаметр окружности с центром O, BD и AC – хорды, $BD||AC$. Проведём радиусы OA, OB, OC, OD. Имеем $OA = OB = OC = D = R$, $\angle AOC = \angle BOD$. Так как у равнобедренных треугольников AOC и BOD равны углы при основании и боковые стороны, то они равны, а потому $AC = BD$.

б) Так как $\angle AOC = \angle BOD$, то лучи OC и OD лежат на одной прямой, а потому CD – диагональ четырёхугольника $ABCD$. $\angle AOC = \angle OCA$, $\angle OAD = \angle ODA$. Следовательно, $\angle OCA + \angle ODA = \angle OAC + \angle OAD = \angle CAD$, следовательно, угол $\angle CAD$ – прямой.

7.22. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Пусть центр окружности O лежит внутри него. Проведём радиусы во все вершины четырёхугольника. Так как $2\angle OAD + \angle ODC + \angle OAB = 180°$, $2\angle OBC + \angle OCD + \angle OBA = 180°$ и $\angle OAB + \angle OAD + \angle ODA + \angle ODC = 180°$, то $\angle OAB + \angle ODC = \angle AOD$. Точно так же $\angle COB = \angle OBA + \angle OCD$. Поэтому $\angle AOD = \angle COB$, треугольники AOD .и COB равны по первому признаку и $AB = CD$.

Докажем второе утверждение. Сначала докажем его для случая, когда AB – диаметр. Проведём радиусы OB и OC. Так как $OA = OB = OC = OD = R$ и $AB = CD$ (по предыдущей задаче), то треугольники OAB и OCD равны, а потому равны углы A и B. Тогда равны треугольники ABC и ABD, а потому $AC = BD$.

Пусть теперь обе хорды AB и CD отличны от диаметра и лежат с разных сторон от диаметра KL, им параллельного. Проведём отрезки KA, KD, LB, LC, KC, LD. Мы уже получили ранее, что $KA = LB$, $KC = DL$, $\angle CKL = \angle DLK$, $\angle AKL = \angle BLK$, следовательно, $\angle AKC = \angle BLD$. Поэтому треугольники AKC и BLD равны, следовательно, $AC = BD$.

7.24. а) Два перпендикуляра к одной прямой параллельны; б) треугольники будут равны по определению равенства треугольников; в) диагонали равны как гипотенузы равных прямоугольных треугольников; г) это следует из того, что, во-первых, точка пересечения диагоналей делит их пополам и, во-вторых, каждая сторона прямоугольника при центральной симметрии относительно точки пересечения диагоналей переходит в противоположную сторону.

7.25. Эти свойства вытекают из того, что диагонали квадрата разбивают квадрат на четыре равных друг другу равнобедренных прямоугольных треугольника.

7.26. Каждая средняя линия прямоугольника является его осью симметрии, а точка их пересечения является центром его симметрии. Поэтому каждая из четырёх полученных его частей переходит в другую часть в результате осевой или центральной симметрии.

7.33. Две оси симметрии, которые содержат средние линии четырёхугольника.

7.34. Четыре оси симметрии, о двух из которых уже сказано в задаче 7.33, а две другие содержат диагонали квадрата.

7.35. Ответы в учебнике. Решение очевидно.

7.36. Рис. 80.

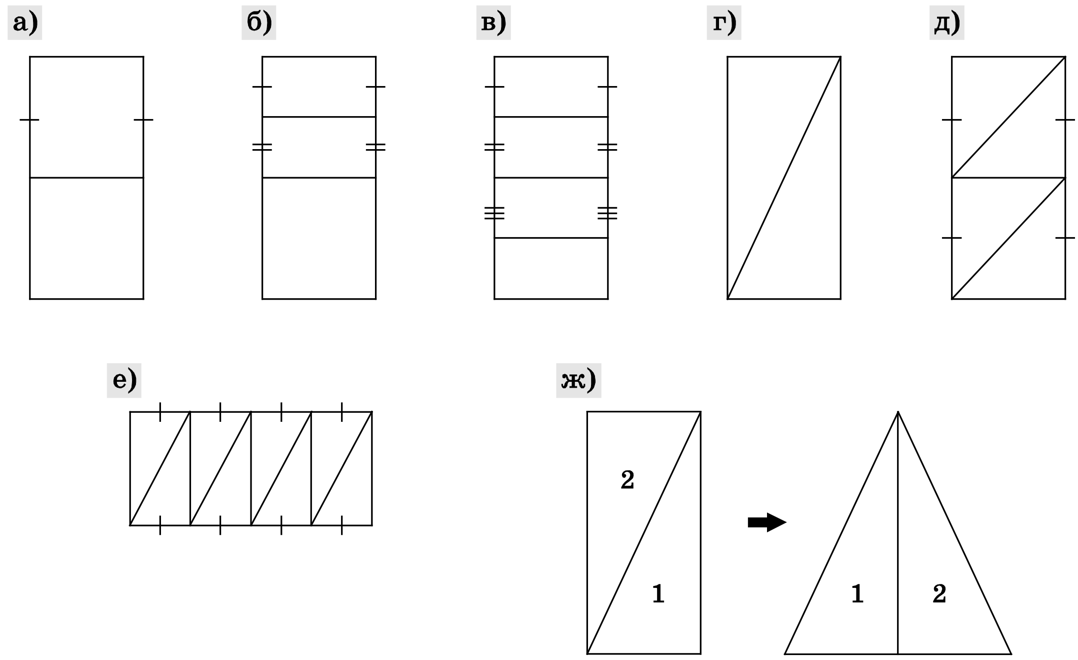


Рис. 80

7.37. а) Построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза вдвое больше катета, и достроить его до прямоугольника; б) это квадрат.

7.38. а) Четырёхугольник, имеющий три прямых угла, является прямоугольником; б) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных, перпендикулярна и второй из них.

7.39. Они являются прямоугольниками, у которых соответственно равны смежные стороны. Так как прямоугольник однозначно задаётся парой смежных сторон, то такие прямоугольники равны.

7.41. а) – г) Можно (рис. 81); д) нельзя.

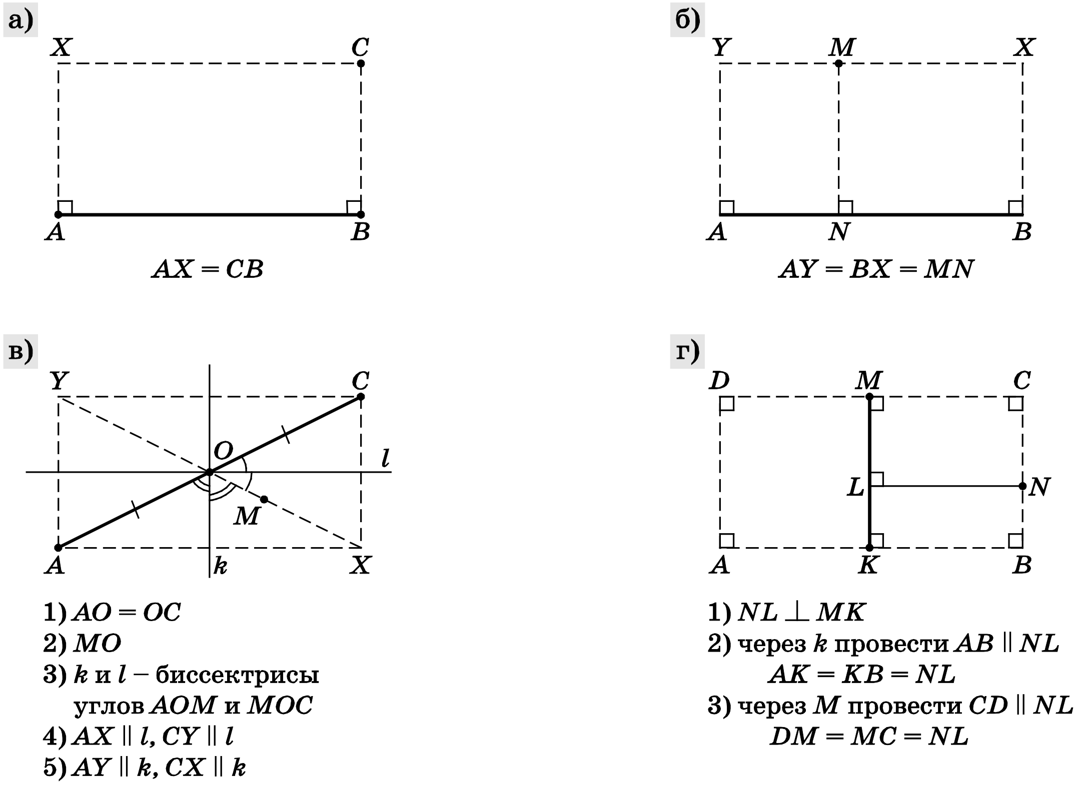


Рис. 81

7.42. Восстановить можно тогда, когда осталась средняя линия и точка на стороне, которой параллельна средняя линия. В других случаях восстановить нельзя.

7.43. После развёртывания листа дыра в нём сложена из четырёх одинаковых отрезанных фигур (рис. 82). Получатся: а) ромб (рис. 82, *а*); б) квадрат (рис. 82, *б*); в) прямоугольник (рис. 82, *в*).

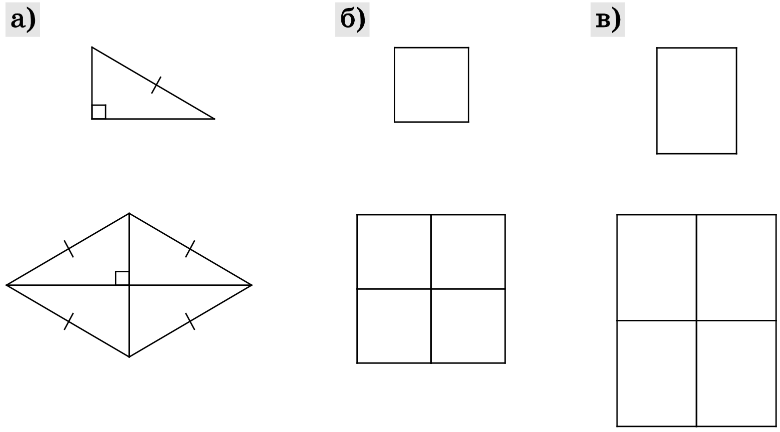


Рис. 82

7.44. Толщину небольших предметов измеряют штангенциркулем. Поэтому можно предложить инструмент, похожий на большой штангенциркуль – рейку, вдоль которой двигаются две перпендикулярные ей рейки.

7.45. Можно сделать обход, который представляет собой три стороны прямоугольника.

7.46. Рис. 83 для тетраэдра.

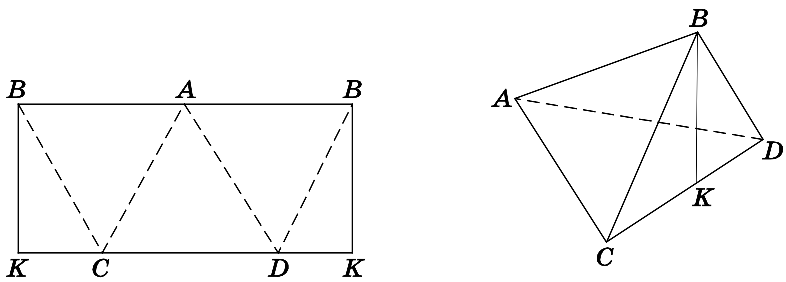


Рис. 83

§ 8. Сумма углов треугольника

8.1. Все углы его равны 180° : 3 = 60°.

8.2. а), б). Достроим данный треугольник до равностороннего.

8.3. а) 70°; б) 75°; в) 80°; г) 72°; д) 120°; е) 80°; ж) 36°.

8.4. – 8.7. Ответы в учебнике.

8.8. Решается аналогично решению задачи 8.25, данному в учебнике.

8.9. Если α и β – данные углы. Решения в двух возможных случаях даны на рис. 84 и рис. 85. Ответы: в первом случае $0{,}5|\beta - \alpha|$, во втором случае $0{,}5(\alpha + \beta)$.

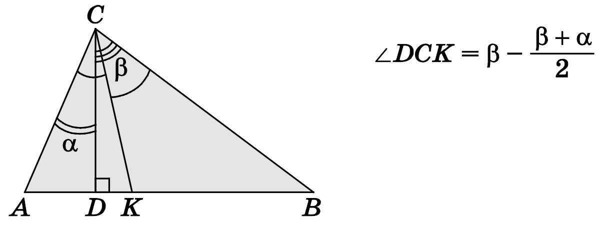


Рис. 84

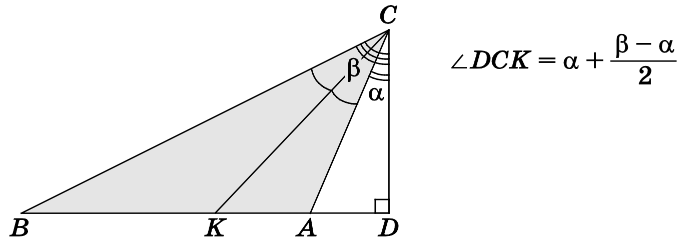


Рис. 85

8.10. Рис. 86.

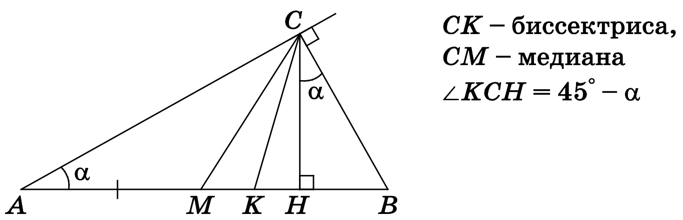


Рис. 86

8.11. Рис. 87.

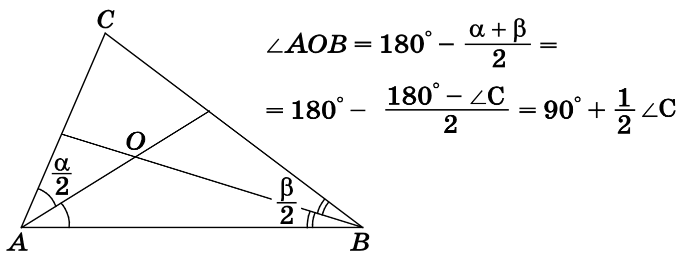


Рис. 87

8.12. Чтобы было удобнее вычислять углы, концы отрезков стоит обозначить.

8.13. Грань *ABC* – равносторонний треугольник, остальные грани – равные друг другу равнобедренные треугольники, угол при вершине которых известен. Если он равен α, то остальные углы равны $90^\circ - 0{,}5\alpha$.

8.14. От 128° до 130°.

8.15. а) Меньший угол в интервале (0°; 45°), больший угол равен 90°; б), в) меньший угол в интервале (0°; 60°), а больший угол в интервале (60°; 180°).

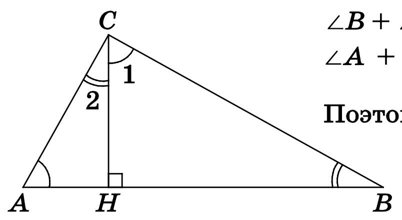
8.16. Равносторонним треугольником.

8.17. Углы 15° и 80м могут быть как углами при вершине равнобедренного треугольника, так и углами при его основании; угол 160° может быть лишь углом при вершине равнобедренного треугольника.

8.18. Например, три угла четырёхугольника.

8.19. Невозможно, чтобы: а) лишь в одном из углов число градусов было не целым; б) лишь в одном из углов были указаны секунды; в) число градусов было нечётным; г) сумма последних цифр градусов не равнялась 10; д) сумма углов была меньше 180°.

8.20. а) Это вытекает из того, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° (рис. 88).



$\angle A + \angle 2 = 90^\circ$
$\angle B + \angle 1 = 90^\circ$
$\angle A + \angle B = 90^\circ$

Поэтому $\angle 1 = \angle A$ и $\angle 2 = \angle B$

Рис. 88

б) Пусть CO – медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к его гипотенузе AB (рис. 89).

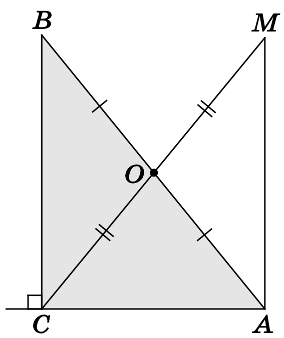


Рис. 89

Продолжим медиану CO на отрезок $OM = OC$ и проведём отрезок MA. Так как $\Delta OAM = \Delta OCB$, то $\angle OAM = \angle B$. Поэтому $\angle CAM$ равен сумме острых углов прямоугольного треугольника, т. е. этот угол прямой. Прямоугольные треугольники ABC и CMA равны (по двум катетам). Поэтому равны их гипотенузы $CM = AB$, а значит, равны и половины этих гипотенуз: $OC = OA = OB$.

8.21. Оба признака являются следствиями второго признака равенства треугольников.

8.22. Одна из диагоналей четырёхугольника разбивает его на два треугольника, сумма углов которых и даёт сумму углов четырёхугольника, т. е. 180° + 180° = 360°.

8.23. а) 35°; б)130°; в) 90°; г)130°; д)100°; е) 90°.

8.24. В интервале (0°, 65°).

8.26. Пусть в остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и BK, которые пересекаются в точке M. Рассмотрим углы четырёхугольника $CKMH$: два угла по 90°, угол C треугольника ABC и тупой угол KMH между высотами. Так как сумма углов четырёхугольника равна 360°, то угол C равен острому углу между высотами AH и BK.

8.27. Пусть в треугольнике ABC проведены биссектрисы AH и BK, которые пересекаются в точке O. В задаче 8.11 доказано, что $\angle AOB = 90° + 0{,}5\angle C$. Поэтому смежный с ним острый угол α между биссектрисами равен $90° – 0{,}5\angle C$. Следовательно, $\angle C = 180° – 2\alpha$.

8.28. Рис. 90. Как использовать этот результат для деления и удвоения угла, показано на рис. 91, *а, б*.

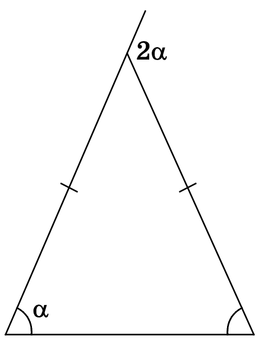


Рис. 90

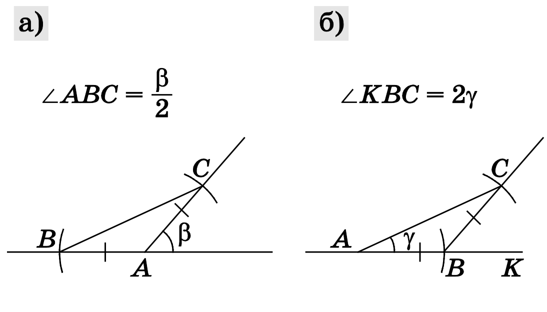


Рис. 91

8.29. Пусть внешний угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC равен 2α. а) Тогда внешний угол при основании треугольника ABC равен $180° – \alpha$. б) Пусть биссектрисы внешних углов при основании пересекаются в точке O. $\angle BCO$ равен половине внешнего угла, найденного в п. «а», т. е. он равен 90° – 0,5α. Поэтому $\angle BOC = \alpha$. в) Этот угол является углом при основании MK равнобедренного треугольника OMK с углом α при вершине O, т. е. он равен 90° – 0,5α. Этот же результат можно получить, рассмотрев накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и KM и секущей OM.

8.30. Пусть из точки O проведены перпендикуляры OK, OM и OP на стороны AB, BC и AC соответственно (рис. 92). Пусть $\angle KOP = \alpha$, $\angle KOM = \beta$. Тогда $\angle A = 180° - \alpha$, $\angle B = 180° - \beta$, $\angle C = \alpha + \beta - 180°$.

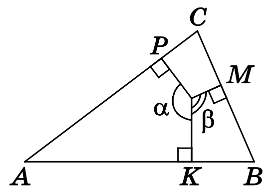


Рис. 92

8.31. $BC = AO = 1$ (рис. 93).

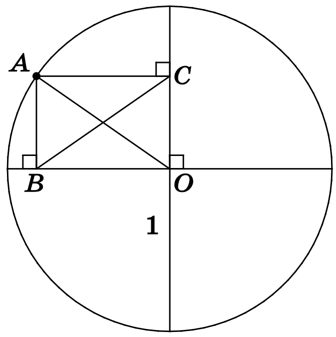


Рис. 93

8.32. Рис. 94.

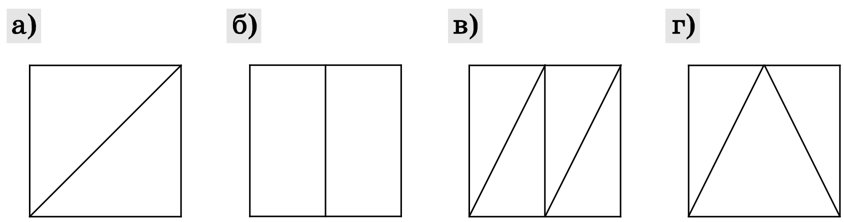


Рис. 94

8.33. в) Рис. 95.

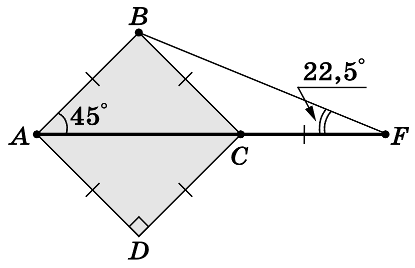


Рис. 95

8.34. Рис. 96.

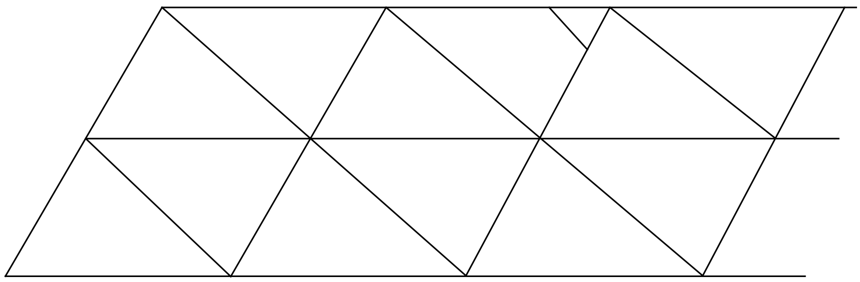


Рис. 96

Задачи к главе III

III.1. Образец решения такой задачи дан в учебнике – задача 8.25.

III.2. Посчитаем: а) 360° · 8 – 360° · 6 = 720°; б), в) 360° · 4 – 180° · 4 = 720°; г) 360° · 5 – 360° – 180° · 4 = 720°. Получится всегда 720° для любого выпуклого многогранника. Это следует из формулы Эйлера $e - k + f = 2$ для числа вершин, рёбер и граней такого многогранника.

III.3. а) И основание, и боковая сторона лежат в интервале $(0; \frac{1}{2})$; б) в интервале $(\frac{10}{3}; 5)$.

III.4., III.15. Пусть дан треугольник ABC, в нём выбрана точка O и $OA = a_1$, $OB = b_1$, $OC = c_1$. По неравенству треугольника имеем $c < a_1 + b_1$, $a < b_1 + c_1$, $b < a_1 + c_1$. Складывая все три неравенства, получим $2(a_1 + b_1 + c_1) > a + b + c$. Далее имеем $a_1 + c_1 < a + c$, $b_1 + c_1 < b + c$, $a_1 + b_1 < a + b$. Складывая эти неравенства и сокращая на два, получаем, что $a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c$.

III.5. Каждые две пересекающиеся прямые дают одну точку пересечения.

Поэтому если каждые две из данных прямых пересекаются, то общее число точек равно $\frac{(n-1)n}{2}$. Можно рассуждать и так: две прямые пересекаются в одной точке. Когда добавляется третья прямая, то число точек пересечения возрастает на 2, получаем 1+2; когда добавляется четвёртая прямая, то число точек пересечения возрастает на 3, т. е. получаем 1 + 2 + 3;… когда происходит переход от n–1 к n, то добавляется n–1 точка, т. е. количество точек равно 1 + 2 + 3 + … + (n – 1). Такую сумму мы уже считали: она равна $\frac{(n-1)n}{2}$.

III.6. Через вершину *A* треугольника *ABC* проходят две такие прямые: одна из них параллельна прямой *BC*, другая содержит биссектрису угла *A* треугольника *ABC*.

III.7. Пусть в треугольнике *ABC* сторона *BC* – наибольшая. Опустим на неё высоту *AH*. Это наименьшая из высот треугольника *ABC*. Полоса, ограниченная прямой *BC* и прямой, проходящей через точку *A* и параллельной *BC*, имеет наименьшую ширину.

III.8. Даны две точки *A* и *B*, а также отрезок $a < AB$. Строим прямоугольный треугольник *ABC* с катетом $BC = a$. Проводим прямую *AC* и параллельную ей прямую через точку *B*.

III.9. а) Сначала в полосе строится прямоугольный треугольник с катетом, равным ширине полосы, и гипотенузой данной длины. Затем через данную точку проводится прямая *a*, параллельная гипотенузе построенного треугольника. б) Заданная точка должна быть равноудалена от краёв полосы. Тогда любая хорда полосы, проходящая через эту точку, делится ею пополам.

III.10. Пусть дана полоса, ограниченная прямыми *a* и *b*. Возьмём любую точку *A* на прямой *a* и проведём через неё прямую *p*, наклонённую к прямой *a* на 60°. Прямая *p* пересечёт прямую *b* в некоторой точке *B*. Отложим на прямой *a* от точки *A* отрезок *AC* = *AB* так, чтобы угол *CAB* был равен 60°. Треугольник *ABC* – искомый.

III.11. Чтобы разбить плоскость на *n* частей достаточно на ней провести

$n-1$ параллельную прямую.

III.12. Пусть внутри угла *A* взяли точку *M*. Продолжим отрезок *AM* на отрезок *MB*, равный отрезку *AM*. Проведём через точку *B* прямые, параллельные сторонам угла, и обозначим через *C* и *D* точки пересечения их со сторонами угла. Отрезок *CD* – искомая хорда угла *A*, точка *M* – её середина.

III.13. Пусть два равнобедренных треугольника *ABC* и *KBC* лежат с одной стороны от прямой *BC* и $\angle A$ меньше $\angle K$. Тогда $\angle KBC > \angle ABC$. Поэтому точка *A* лежит внутри треугольника *KBC*. Прямая *AK* является серединным перпендикуляром отрезка *AB* и делит пополам углы при вершинах *A* и *K*. Угол *BAK* – тупой, а потому в треугольнике *BAK* сторона *KB* больше стороны *AB*. Следовательно, периметр треугольника *KBC* больше периметра треугольника *ABC*.

III.14. Если вершины малого треугольника лежат на сторонах большого, то решение получается непосредственно из неравенства треугольника.

Если вершины малого треугольника лежат внутри большого треугольника, то вершины малого треугольника можно поочерёдно утянуть на стороны большого, увеличивая тем самым его периметр. Утягивание при этом можно производить по лучам, являющимся продолжением биссектрис малого треугольника за его вершины. При этом будут получаться тупые углы, которые и обеспечат выполнение нужных неравенств.

III.16. $a + b > c$; $a + b + c > 2c$; $c < \frac{1}{2}(a + b + c)$.

III.17. Пусть *ABCD* – четырёхугольник, точки *K* и *L* лежат на его сторонах *AD* и *BC* соответственно. В треугольнике *BKC* отрезок *KL* меньше какой-либо стороны *KB* или *KC*. Пусть он меньше *KC*. В треугольнике *ACD* отрезок *KC* меньше какой-либо из сторон *AC* или *CD*. Что и отвечает требованию задачи.

Утверждение обобщается на любой выпуклый многоугольник, а также на тетраэдр и вообще на выпуклый многогранник.

III.18. Обозначим края полосы как *a* и *b*. Пусть точка *A* находится на краю *a*, точка *B* – на краю *b*, причём прямая *AB* не перпендикулярна краям полосы.

Средняя линия полосы пересекает AB в точке, равноудалённой от краёв полосы, а потому отрезок AB делится этой точкой пополам. Обратное утверждение может быть таково: если точка делит пополам некую хорду этой полосы, то она лежит на средней линии этой полосы. Для доказательства достаточно провести через эту точку прямую, перпендикулярную краям полосы.

III.19. Оба утверждения следуют из теоремы о сумме углов треугольника, равенства углов при основании равнобедренного треугольника и второго признака равенства треугольников.

III.20. а) К условию надо добавить, что и вторая прямая пересекает стороны угла. Тогда требуемое утверждение вытекает из равенства соответственных углов и признака равнобедренного треугольника. б) Вместо равенства соответственных углов используем равенство накрест лежащих углов. в) Если от некоторого угла две прямые отсекают равнобедренные треугольники, то эти прямые параллельны. Их параллельность следует из равенства соответственных углов. а), б) и г) Верны, в) нет.

III.21. Во всех задачах достаточно доказать, что нужные нам точки (вершины треугольников, концы медиан, высот, биссектрис) одинаково удалены от прямой, проходящей через основание треугольника, т. е. равенство соответствующих высот в равных треугольниках.

III.22. Пусть α – угол при основании треугольника. Тогда внешний угол равен 2α, угол между его биссектрисой и боковой стороной равен α и утверждение «а» следует из равенства скрещивающихся углов при параллельных прямых, а обратное ему утверждение вытекает из признака параллельности прямых (по равенству скрещивающихся углов).

III.23. Такого быть не может. Это следует из задачи III.14. Вообще периметр любого выпуклого многоугольника меньше периметра содержащего его выпуклого многоугольника.

III.24. Построим точку M, симметричную точке B относительно данной прямой a. Пусть отрезок AM пересекает прямую a в точке C. Ломаная ACB имеет длину, равную длине отрезка AM (рис. 97).

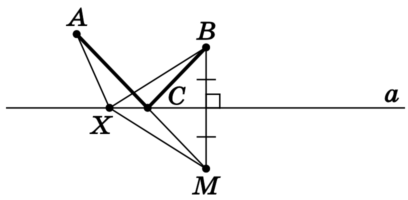


Рис. 97

Для любой точки X на прямой a, отличной от C, длина ломаной AXB больше длины ломаной ACB, поскольку сумма длин сторон AX и XM треугольника AXM больше его стороны AM, а $AC + CB = AM < AX + XM = AX + XB$.

III.25. Каждая сторона треугольника должна быть больше разности двух других. Складной метр состоит из десяти звеньев по 10 см. Наименьшая сторона треугольника больше 10 см, так как разность двух других сторон кратна 10 см. Если наименьшая сторона равна 20 см, то две другие стороны равны по 40 см (других возможностей нет). Если же наименьшая сторона равна 30 см, то две другие равны 30 см и 40 см (других возможностей нет). Итак, 20, 40, 40 или 30, 30, 40.

III.26. Каждая сторона треугольника должна быть больше разности двух других. Подходит лишь 10 см. Ни 9, ни 11 уже не годятся, так как 10 – 9 = 1 и 11 – 10 = 1, а 10 – 10 < 1.

III.27. Построив любую хорду угла и найдя сумму углов наклона этой хорды к сторонам угла, определим заданный угол как разность развёрнутого угла и этой суммы (рис. 98, *а*). Затем построим хорду равного наклона и проведём её серединный перпендикуляр (рис. 98, *б*). Этот перпендикуляр и является биссектрисой угла.

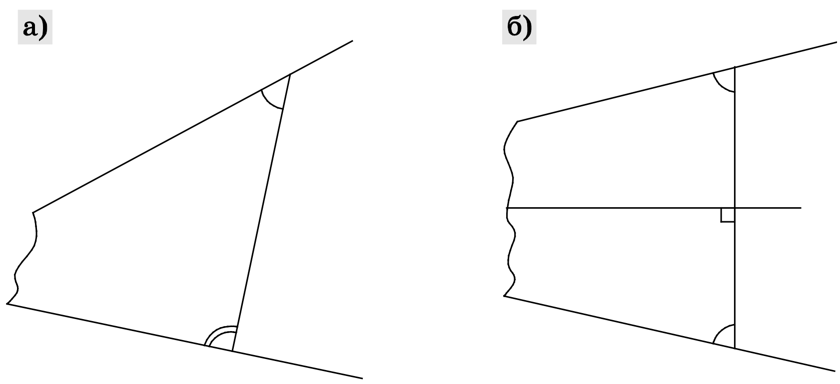


Рис. 98

III.28. Надо последовательно сгибать, прикладывая друг к другу противоположные края листа.

III.29. Пусть точки A, B, C, D лежат на сторонах прямоугольника $KLMN$: точка A – на стороне KL, точка B – на стороне LM, точка C – на стороне MN, точка D – на стороне NK. Отразим точку D от прямой KL и получим точку D_1. Отразим точку C от прямой LM и получим точку C_1. Получим ломаную D_1ABC_1, наименьшая длина которой получится, если её вершины лежат на одной прямой.

III.30. В точке пересечения диагоналей. Это следует из нестрогого неравенства треугольника, записанного для каждой диагонали четырёхугольника. Это неравенство получается, если точку внутри четырёхугольника соединить с его вершинами.

III.31. Задача решается на развёртке куба. Развёртку надо взять такой, чтобы заданные точки соединялись на ней отрезком, не пересекающим края развёртки. Это можно выполнить в качестве практической работы.

III.32. а) Приложим линейку поочерёдно к сторонам данного угла, проведя каждый раз прямую вдоль другого её края. В пересечении проведённых прямых получим точку, равноудалённую от сторон угла, а потому лежащую на её биссектрисе.

б) Приложим линейку так, чтобы один её край проходил через первый конец данного отрезка, а другой – через второй его конец. Проведём две параллельные прямые вдоль её краёв. Повторим эту процедуру, приложив линейку симметричным образом. В результате получим две точки пересечения прямых, проведённых через края линейки. Эти точки равноудалены от концов данного отрезка, а потому лежат на его серединном перпендикуляре.

в) Пусть данный угол образован лучами a и b. Приложим линейку первый раз так, чтобы один её край совпал с лучом a, а другой край пересекал луч b. Проведём прямую вдоль второго края. Затем приложим линейку так, чтобы один её край совпал с лучом b, а другой её край не пересекал луч a. Проведём прямую вдоль второго края. Обе проведённые прямые пересекаются в некоторой точке. Соединим вершину исходного угла и полученную точку лучом c с началом в вершине исходного угла. Получим угол со сторонами *b* и *c*, равный данному, таким образом угол со сторонами *a* и *c*, в два раза больше данного.

г) Пусть дан отрезок *AB*. Приложим линейку с краями *a* и *b* так, чтобы край *a* прошёл через точку *A*, а край *b* – через точку *B*. Затем приложим линейку ещё раз так, чтобы край *a* прошёл через точку *B*. Проведём прямую *c* через край *b*. Проведём прямую *AB*. Там, где она пересечёт прямую *c*, получим такую точку *C*, что *BC* = *AB*.

д) Пусть дан отрезок *AB* и точка *C* на прямой *AB*. Удвоим отрезок *AC* согласно предыдущему построению, получим отрезок *CD*. Затем построим серединный перпендикуляр отрезка *AD* (задача «б»)

е) Пусть дан отрезок *AB* и точка *D* вне его. Сначала построим середину отрезка *AB* – точку *K*. Проведём луч *AD* и возьмём на нём точку *E* за точкой *D*. Проведём лучи *BD* и *KE*. Точку пересечения этих лучей обозначим как *F*. Проведём лучи *AF* и *BE*. Точку пересечения этих лучей обозначим как *C*. Прямая *DC* параллельна прямой *AB*.

ж) Задача сводится к предыдущим. Возьмём на данной прямой отрезок *AB*. Проведём серединный перпендикуляр отрезка *AB*. Затем через данную точку проведём прямую, параллельную проведённому серединному перпендикуляру.

III.33. г) Соединяем две точки отрезком, строим серединный перпендикуляр к полученному отрезку и откладываем на нём отрезок, равный половине построенного – получим вершину квадрата. д) Соединяем две точки отрезком, строим серединный перпендикуляр к полученному отрезку и откладываем на нём отрезок, равный половине построенного – получим середину стороны квадрата. е) Проводим перпендикуляр из центра на прямую, проходящую через две данные точки на стороне – получим половину стороны квадрата.

III.34. С точки зрения геометрии, эту задачу можно считать задачей о построении квадрата по его центру и двум точкам на его сторонах. О том, какая точка – центр, не сказано, и надо последовательно считать центром каждую из трёх заданных точек. Наверное, точки не лежат на одной прямой (если они лежат на одной прямой, то одна из них должна быть серединой отрезка с концами в двух других и по таким точкам квадрат не восстановить). Полагая, что точки лежат на одной стороне, строим квадрат так, как это сделано в пункте «е» предыдущей задачи. Если клад не найден, то, значит, точки лежат на разных сторонах квадрата, а такая задача однозначно не решается: например, если O – центр квадрата, а две другие точки A и B – концы гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника OAB.

III.35. *Указание:* построение перпендикуляра описано в задаче II.26 к главе II, измерение угла – в задаче I.41 к главе I.

III.36. *Указание:* измерение угла описано в задаче I.44 к главе I, а сложение величин углов можно произвести с помощью встроенного в программу калькулятора. Если воспользоваться командами «Измерения» и «Вычислить», то появится встроенный калькулятор. Выделяя по очереди величины трёх углов треугольника, вы увидите величины этих углов в рабочем окне калькулятора и сможете их сложить с помощью клавиши «+».

III.37. *Указание:* построение перпендикуляра описано в задаче II.26 к главе II, измерение угла – в задаче I.44 к главе I, сложение величин с помощью встроенного в программу калькулятора описано в задаче III.36 к главе III.

Гуманитарная составляющая курса геометрии

Традиционно в список гуманитарных предметов включаются все языки (родной и иностранные), история, литература, мировая художественная культура, культура речи, рисование. При этом, как правило, даже и не вспоминают о геометрии, хотя геометрия – единственный учебный предмет в школе, в котором органично сочетаются многие педагогические возможности, содержащиеся в перечисленных учебных предметах.

Действительно:

– терминология, которую использует геометрия, в основном латинского или греческого происхождения, и хорошо продуманная работа с ней может расширить общий кругозор учащихся, подтолкнуть их к размышлениям об этимологии и русских слов;

– геометрия – единственный школьный предмет, предполагающий систематическое обучение школьников визуальному способу получения информации: во время работы с геометрическими фигурами, при различных способах их построения и изображения, при чтении чертежей дети обучаются ещё одному «иностранному» языку – визуальному (это тем более важно, потому что, как говорят психологи, 90% информации человек получает через органы зрения);

– важность осмысления учащимися формулировок определений и теорем, а также их доказательств приводит к необходимости проведения учителем специальной работы по развитию речи учащихся на уроках геометрии, которая тем самым способствует повышению общего культурного уровня учащихся;

– необходимость проведения доказательных рассуждений при изучении геометрии способствует формированию у учащихся аргументированной речи, умения отстаивать свою точку зрения;

– геометрия – одна из самых древних наук, и знакомство учащихся с её историей, как с точки зрения истории математических идей, так и в связи с различными историческими аспектами развития общества, безусловно, является важным элементом гуманитарного образования школьников;

– изучая геометрические фигуры как формы различных реальных предметов, мы имеем возможность иллюстрировать многие геометрические понятия и факты примерами различных архитектурных сооружений и других произведений искусства, тем самым расширяя и углубляя знания учащимися мировой художественной культуры.

Отметим также, что геометрия для школьника – учебный предмет, который в значительной степени похож на другие учебные предметы: ботанику, географию, физику. Каждый из этих предметов изучает окружающий мир, и каждый при этом – с определённой точки зрения. Геометрия изучает этот мир с точки зрения формы и размеров реальных предметов и их взаимного расположения. Так же как в русском языке есть буквы – «картинки», изображающие звуки, а в арифметике есть числа – «картинки», изображающие количество, так и в геометрии есть свои «картинки» – геометрические фигуры, которые изображают форму, размеры или (и) взаимное расположение реальных предметов, являются мысленным образом этих предметов. Так же как один звук на письме может быть изображён разными буквами, так и один предмет может создавать у нас разные мысленные образы, а потому изображаться разными геометрическими фигурами – в зависимости от того, какие свойства предмета в данный момент являются важными. Например, столб может быть изображён цилиндром, отрезком или точкой, а монета – кругом, цилиндром или отрезком. В связи с этим полезно предложить учащимся упражнения по рисованию геометрических фигур, изображающих разные предметы, и, наоборот, по заданной геометрической фигуре приводить примеры предметов, которые могут быть такой фигурой изображены.

Взгляд на геометрию с точки зрения её гуманитарной составляющей позволяет по-новому осуществлять и преподавание этого предмета. Специальные упражнения по развитию речи на уроках геометрии, обсуждение этимологии каждого нового термина, включение упражнений на картинках, геометрические экскурсии не только помогут учителю подчеркнуть гуманитарность геометрии, развить интерес ученика к предмету и осуществить дифференцированный подход к обучению, но и облегчат учителю решение задачи по развитию абстрактного и в первую очередь логического мышления учащихся.

Рассмотрим более подробно некоторые из перечисленных форм работы.

1. Развитие речи на уроках геометрии

Для некоторых пунктов учебника приведём примеры различного рода упражнений, направленных на развитие речи учащихся.

К п. 1.1 – 1.2

1. Сравните рисунки 99 и 100. Найдите в них всевозможные различия и запишите их.

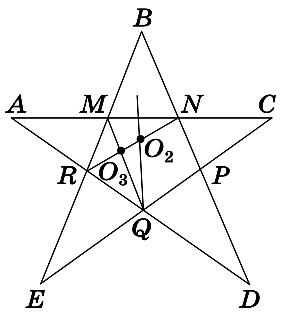


Рис. 99

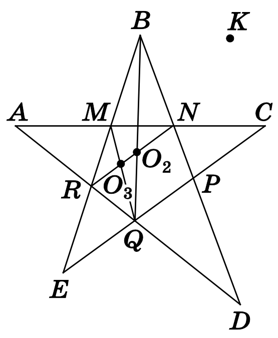
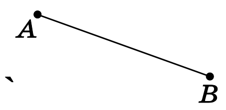
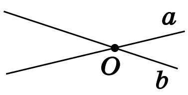
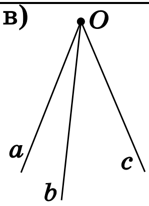
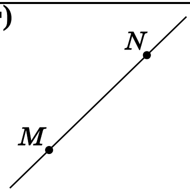


Рис. 100

2. Поставьте вопросы к выделенным словам и словосочетаниям в приведенных предложениях.

1. В дневнике Саши красовалась пятёрка, ***полученная ею на уроке математики***.
2. Лучом называется фигура, ***полученная при неограниченном продолжении отрезка за один из его концов.***
3. Каждый семиклассник, ***принимавший участие в олимпиаде,*** успешно *справился* с большинством заданий.
4. Каждая точка, ***лежащая на прямой,*** эту прямую ***разбивает*** на два луча.

3. Нарисуйте иллюстрацию предложения, помещенного во втором столбце таблицы. Замените предложения словосочетаниями так, чтобы они описывали рисунок, но не содержали глаголов.

Рисунок	Описание рисунка	
	С глаголом	**Без глагола**
а) 	Отрезок соединяет точки A и B.	Отрезок, соединяющий точки A и B.
б) 	Прямые a и b пересекаются в точке O.	
в) 	Лучи a, b и c имеют общее начало.	
г) 	Прямая проходит через точки M и N.	

4. Какое из перечисленных свойств тетраэдра является переводом на русский язык греческого названия этого многогранника:

а) все грани тетраэдра – треугольники; б) у тетраэдра 4 грани; в) у тетраэдра 4 вершины; г) у тетраэдра 6 рёбер ?

К п. 1.5

5. Петя, Коля и Дима измеряли один и тот же отрезок. Петя сказал, что длина отрезка 21,5. Дима возразил: «Нет, длина отрезка 215». А у Коли получилось, что длина отрезка 2,15. Известно, что каждый из мальчиков измерил этот отрезок правильно, но каждый из них допустил ошибку, когда называл результат. Какая это ошибка?

6. Для каждой группы слов найдите слово, которое объединяет большинство слов этой группы, и вычеркните лишние слова. Запишите геометрический термин, которым можно продолжить каждую группу.

эксперимент	примерка
перископ	размер

перипетия	мерзлота
перина	метраж
периферия	метроном

К п. 2.2

7. Прочитайте названия геометрических фигур, связанных с окружностью. *Центр; радиус; диаметр; дуга; полуокружность; хорда; точка, удалённая от центра окружности на расстояние, равное длине диаметра; точка, удалённая от середины диаметра на расстояние, равное длине радиуса.*

Запишите их в следующем порядке:

Фигуры:

а) не имеющие с окружностью общих точек;

б) имеющие с окружностью ровно одну общую точку;

в) имеющие с окружностью конечное число общих точек;

г) лежащие на окружности.

К п. 2.6

8. Из списка различных геометрических фигур и конструкций из них выпишите в один столбик названия плоских фигур, в другой – пространственных.

Тетраэдр; треугольник; пересечение сферы и плоскости; шар; хорда сферы; диаметр окружности; пересечение сферы и ограниченного ею шара; диагональное сечение куба.

9. Заполните таблицу, в которой сравниваются свойства шара и сферы, так, чтобы были видны различия между ними.

Свойства сферы	**Свойства шара**
1. Все точки, лежащие на сфере, одинаково удалены от её центра.	1. ________________________________ ________________________________
2. ________________________________ ________________________________	2. Центр шара принадлежит шару.

3. Сечение сферы плоскостью – окружность.	3. ________________________________ ________________________________
4. ________________________________ ________________________________	4. Прямая может иметь с шаром бесконечно много общих точек.
5. Нельзя найти отрезок, целиком лежащий в сфере.	5. ________________________________ ________________________________

10. Один ученик так сформулировал определение окружности: «Окружностью называется замкнутая линия, все точки которой одинаково удалены от точки, называемой центром». Объясните, чем это утверждение отличается от определения, приведённого в учебнике. Объясните необходимость слова *плоскость* в определении окружности. Для этого приведите пример соответствующей геометрической фигуры и нарисуйте её.

К п. 3.1

11. Чтобы объяснить, что два угла являются смежными, нужно проверить, что выполняются два условия. Сформулируйте эти условия.

1. ______________________ имеют общую ____________________________

2. Две другие ________________________ этих углов ____________________

Рассмотрите следующие чертежи (рис. 101, *а – ж).* Укажите рисунки, на которых углы 1 и 2:

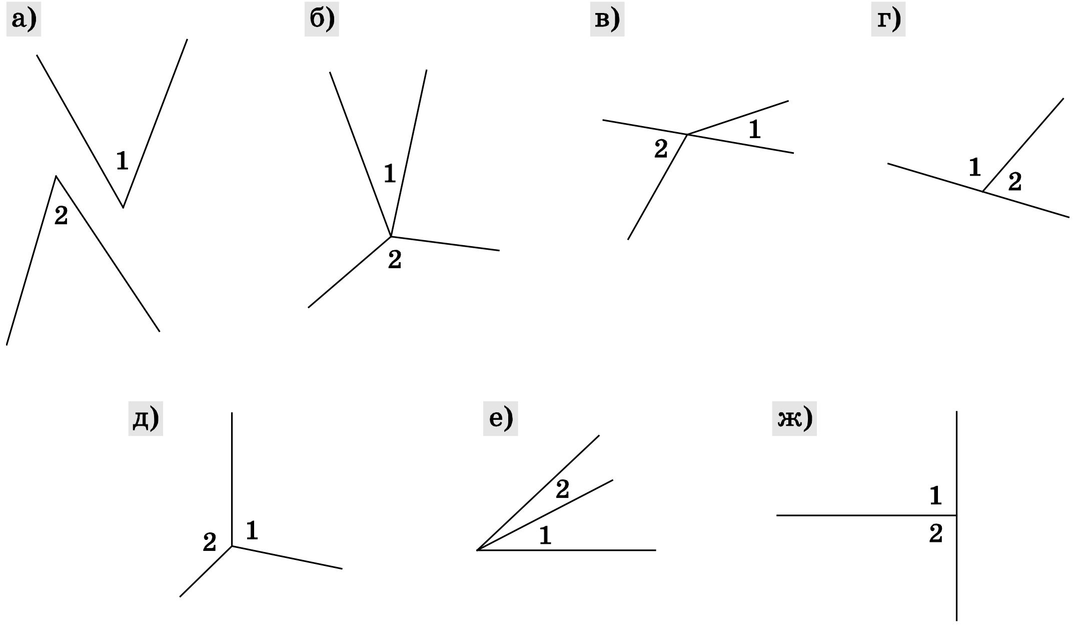


Рис. 101

а) не удовлетворяют ни одному из условий;

б) удовлетворяют хотя бы одному условию;

в) удовлетворяют только одному условию;

г) удовлетворяют только первому условию;

д) удовлетворяют только второму условию;

е) удовлетворяют обоим условиям.

К п. 3.4

12. Чтобы объяснить, что луч является биссектрисой угла, нужно проверить, что выполняются два условия. Сформулируйте эти условия.

1) ___________________ исходит из _____________________

2) ______________________ делит _______________________

Рассмотрите рисунки 102, *а – е.* Укажите рисунки, на которых выделенный луч:

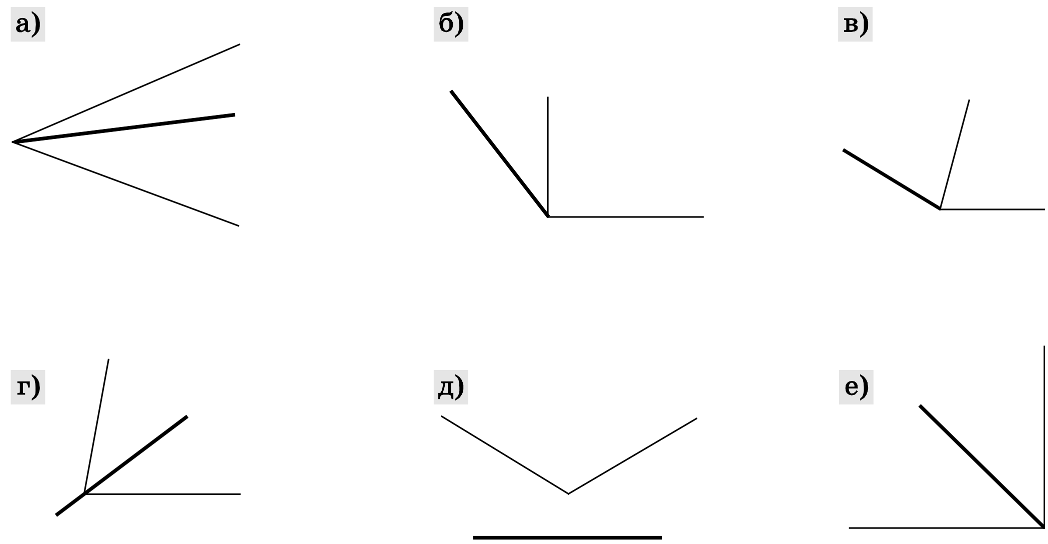


Рис. 102

а) не удовлетворяет ни одному из условий;

б) удовлетворяет хотя бы одному условию;

в) удовлетворяет только одному условию;

г) удовлетворяет только первому условию;

д) удовлетворяет только второму условию;

е) удовлетворяет обоим условиям.

13. В каждом пункте из двух простых предложений составьте сложное с помощью союзов: *так как*, *потому что*, *поэтому*, *ибо*, *вследствие того что*, *благодаря тому что*, *так что* и др.

1. Мы остались дома. С утра шёл сильный дождь.
2. Спектакль закончился. Зрители вышли из театра.
3. Отрезки AM и MB равны. M – середина отрезка AB.
4. Луч OM – биссектриса угла AOB. Угол AOM равен углу MOB.
5. Прямая AB лежит в плоскости α. Точки A и B принадлежат плоскости α.

К п. 3.5 – 3.8

14. Рассказывая решение задачи, ученица 7 класса сказала: «Угол ABC – вертикальный, а угол MNP – смежный». Объясните, почему эта фраза не имеет смысла.

15. В каких из приведённых предложений допущены неуместные сравнения?

1. Отрезки *AB* и *CD* равны.
2. Длина отрезка *AC* равна отрезку *BD*.
3. Отрезок *AD* равен 8 см.
4. 10 см – длина отрезка *BD*.
5. Отрезок *CD* меньше длины отрезка *AK*.
6. Угол *ACD* и градусная мера угла *AOB* не равны.
7. Угол *BOC* не равен 30°.
8. Градусная мера угла *ACD* больше угла *ACD*.

16. В каждой группе слов:

а) найдите то, что объединяет большинство слов группы;

б) вычеркните лишние слова;

в) расширьте каждую группу геометрическим термином.

замер	резина	секунда
намеренно	резец	отсекать
померкнуть	изрезанный	рассечённый
измеряющий	резьба	пересечь
замереть	результат	секира
отмерить	порезать	секатор
размерный	резкий	секундант
__________	резолюция	секта
	резчик	___________
	___________	

17. Придумайте задачу, для решения которой можно использовать утверждение: «Градусная мера развёрнутого угла 180°». Сделайте чертёж к задаче и решите её.

18. Из приведённых названий математических понятий, жизненных явлений и отношений выпишите в левый столбик те утверждения и понятия, которые можно характеризовать словом *взаимно*, в правый – те, к которым это слово не подходит.

Дружба; монолог; 5 меньше 15; перпендикулярность двух прямых; 110 делится на 5; диалог; доклад; перпендикулярность прямой и плоскости.

Объясните, почему мы употребляем слово *взаимно,* когда говорим о перпендикулярности двух прямых.

19. Придумайте задачу, в которой идёт речь о взаимно-перпендикулярных прямых.

20. Заполните пропуски словами *любой*, *некоторый*, *может быть* так, чтобы получились верные утверждения.

1. Через ________________ две точки проходит прямая.
2. Сумма ________________ двух смежных углов равна развёрнутому углу.
3. ____________ два невертикальных угла _____________________ равны.
4. Две __________________________ окружности, лежащие на одной сфере, __________________________не пересекающимися.
5. Сумма ___________________________ двух несмежных углов __________ равна развёрнутому углу.
6. Разность ______________ тупых углов _______________________ острым углом.

21. Сформулируйте какой-нибудь вопрос задачи, условие которой может быть записано так:

Две прямые, пересекаясь, образовали четыре угла. Градусная мера одного из них равна 45°.

Какие ещё вопросы можно задать к условию этой задачи?

22. Придумайте задачу, которой может соответствовать рисунок 102, *г*. Решите её.

23. Придумайте и решите задачу, краткое условие которой записано так: $OA \perp OK$, $OB \perp OM$.

24. Придумайте задачу, для решения которой нужно знать свойства вертикальных и смежных углов.

К п. 3.9

25. Приведённые названия геометрических фигур перепишите в два столбика, поместив в один из них названия плоских фигур, в другой – пространственных.

Двугранный угол; пересечение двух плоскостей; скрещивающиеся прямые; линейный угол двугранного угла; биссектральная плоскость двугранного угла; взаимно-перпендикулярные плоскости; пересекающиеся прямые; куб; квадрат; параллелепипед; смежные двугранные углы; вертикальные углы.

К п. 4.3

26. Выделите условие и заключение из следующих утверждений.

Образец:

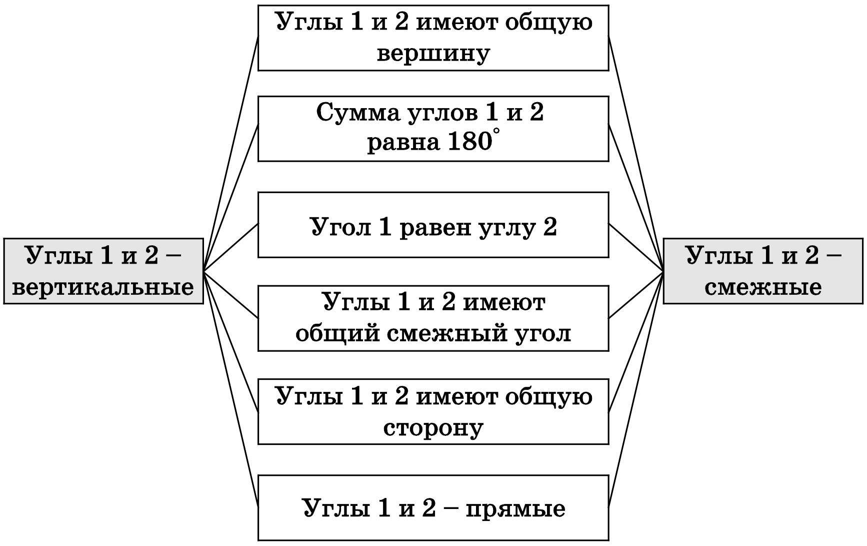
Когда растишь щенков от рождения, к ним привыкаешь.

Условие: Растишь щенков от рождения.

Заключение: к ним привыкаешь.

1. Долог день до вечера, коли делать нечего.
2. Если углы вертикальные, то они имеют общую вершину.
3. За двумя зайцами погонишься – ни одного не поймаешь.
4. Если углы смежные, то их сумма равна 180°.

27. Обведите синим цветом стрелки, указывающие на следствия утверждения «Углы 1 и 2 вертикальные».



Обведите красным цветом стрелки, указывающие на следствия утверждения «Углы 1 и 2 смежные».

28. Придумайте задачу о кубе, для решения которой нужно знать признаки равенства треугольников.

К п. 4.6

29. Прочитайте в учебнике в п. 4.6 доказательство утверждения: «На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны» – и выполните следующие задания.

1. Выпишите фрагмент доказательства, где предполагается противоположное тому, что утверждается.
2. Выпишите неверный вывод, который был получен в результате неверного предположения.
3. Сформулируйте утверждение, с которым в конце доказательства было получено противоречие.

30. Любые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним. Теперь вам стала известна теорема: «Из точки, не лежащей на прямой, можно провести единственный перпендикуляр на эту прямую». В чём сходство между этими двумя утверждениями?

31. Выделите условие и заключение в перечисленных утверждениях.

1. Если треугольники равны, то в них равны соответственные углы.

2. Если треугольники равны, то равны и их периметры.
3. В равнобедренном треугольнике найдутся две равные стороны.
4. В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы.
5. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, равны между собой.

32. Ответьте на предложенные вопросы. Объясните каждый свой ответ. Верно ли, что:

а) любые два угла равнобедренного треугольника равны;

б) в равнобедренном треугольнике найдутся два равных угла;

в) * если AM – биссектриса равнобедренного треугольника ABC, то M – середина отрезка BC;

г) * в равнобедренном треугольнике точки пересечения медиан, высот, биссектрис лежат на одной прямой?

33. Сформулируйте:

1. *Признак* равенства треугольников.
2. *Признак* делимости на 5.
3. *Свойство* вертикальных углов.
4. *Свойство* равнобедренного треугольника.
5. *Признак* равнобедренного треугольника.

К п. 5.3

34. Прочитайте отрывок из сказки М. Горького «Воробьишко».

«Подул однажды ветер – Пудик спрашивает:

– Что, что?

– Ветер дунет на тебя – чирик! и сбросит на землю – кошке! – объяснила мать.

Это не понравилось Пудику, и он сказал:

– А зачем деревья качаются? Пусть перестанут, тогда ветра не будет...»

Объясните, где в рассуждениях воробьишки Пудика перепутаны причина и следствие.

35. Заполните таблицу, сформулировав к каждому утверждению обратное. Поставьте букву **В** против верных утверждений, букву **Н** против неверных. Для неверных утверждений приведите соответствующие контрпримеры.

Взаимнообратные утверждения			
Образец Если число заканчивается цифрой 0, то оно чётно.	**В**	Если число четно, то оно заканчивается цифрой 0.	**Н**, Например, 6.
1. Если угол развёрнутый, то его градусная мера равна 180°.			
2. Если прямая содержит высоту треугольника, то она перпендикулярна к одной из его сторон.			
3. Если периметры двух треугольников равны, то равны и эти треугольники.			

4. Если середина отрезка совпадает с серединой стороны треугольника, то этот отрезок является медианой треугольника.			

36. а) Закончите утверждения так, чтобы и они были верными и обратные к ним тоже были верными.

1. Если число делится на 3, то ___________________
2. Если периметры равносторонних треугольников равны, то _______________

б) Закончите утверждения так, чтобы они были верны, а обратные к ним нет.

1. Если число заканчивается цифрой 2, то ___________________________
2. Если треугольники равны, то ____________________________________

37. Придумайте:

а) верное утверждение, обратное к которому верно;

б) верное утверждение, обратное к которому неверно;

в) неверное утверждение, обратное к которому верно.

К п. 5.5

38. В каждой группе слов и словосочетаний:

а) найдите то, что объединяет большинство слов группы;

б) вычеркните лишнее слово или словосочетание;

в) расширьте каждую группу подходящим по смыслу словосочетанием или словом.

центр окружности	медиана
один из концов хорды	радиус окружности
высота треугольника	сторона квадрата
начало луча	биссектриса треугольника
вершина угла	равносторонний треугольник
__________________	______________________

числовая ось

ось симметрии фигуры

граница полуплоскости

ребро двугранного угла

пересечение двух плоскостей

____

2. Геометрические экскурсии

За последние годы в некоторых школах Санкт-Петербурга накопился определённый опыт проведения геометрических экскурсий для учащихся 5 – 7 классов.

Цель таких экскурсий – на примерах интерьеров, архитектурных и садово-парковых сооружений показать учащимся возможности применения геометрических знаний.

Основная *методика* проведения экскурсий: от истории создания архитектурного или художественного объекта к изучению его внешних форм, разбиению этих форм на детали, определение формы этих деталей, рисование отдельных деталей и здания в целом в разных ракурсах, а затем (чаще всего в качестве домашнего задания) конструирование моделей этих сооружений, а также попытка придумывания новых.

Оснащение экскурсий, как правило, одно и то же: каждый учащийся берёт с собой альбом для рисования, цветные карандаши или фломастеры, тетрадь по геометрии (возможно, пластилин, фотоаппарат).

Можно подготовить и провести экскурсию по теме геометрического материала, который в настоящее время изучается в классе. Экскурсии могут быть обзорные или тематические: «Какие геометрические фигуры бывают»; «Линии»; «Круглые тела»; «Симметрия в природе и архитектуре»; «Паркеты» и др. Такого рода экскурсии удобно проводить в классе, используя фото- и видеоматериалы.

Перечислим некоторые виды упражнений, которые полезно проводить во время экскурсий.

1. Посмотрев на здание, а затем отвернувшись от него, перечислите, сколько различных форм окон (колонн, других деталей) оно имеет. Нарисуйте их.
2. Нарисуйте с различных точек зрения фасад здания, отдельные его детали, решётки, ограды, фонари и пр.
3. Посмотрите на различные фотографии одного и того же здания и попробуйте определить, с какого места произведена съёмка.
4. Обойдите здание и определите, нет ли среди видов спереди, справа, сзади, слева одинаковых.
5. По предложенным деталям изображения здания соберите это изображение целиком.
6. Из одних и тех же моделей (например, цилиндров) соберите разные здания; расставьте цилиндры, имеющиеся у вас, так, чтобы они напоминали колоннаду сначала одного из известных зданий, а затем другого.
7. Сравните фотографию здания и его макет, сделанный, например, из пластилина; найдите неточности или ошибки.
8. На предложенном плане парка нарисуйте маршрут экскурсии, укажите места расположения тех сооружений, которые вы увидели по ходу этой экскурсии.
9. Найдите неточности в предложенном плане парка и устраните их.
10. Нарисуйте план видимой вам части парка.
11. Нарисуйте эскиз понравившегося вам архитектурного сооружения или отдельных его деталей.
12. Сравните рисунки, на которых изображён эскиз одного и того же здания; проверьте правильность изображения фигур.

Можно предложить ученикам в качестве домашнего задания нарисовать понравившиеся архитектурные сооружения и на следующем уроке геометрии по готовым рисункам детей вспомнить основные этапы экскурсии, а затем устроить в классе выставку работ ребят.

Полезно также дать детям индивидуальные домашние задания по изготовлению из бумаги или пластилина моделей отдельных фрагментов здания с тем, чтобы затем в классе из этих фрагментов можно было собрать макет всего здания (конечно, в таком случае учитель должен дать детям соответствующие размеры).

Один из видов коллективной работы по материалам экскурсии – составление тематического фото- или художественного альбома. Это могут быть альбомы с фотографиями и зарисовками по темам: «Мостовые нашего города», «Пирамиды и призмы в строениях нашего города», «Решётки», «Фонари» и пр.

Изготовление наглядных пособий и работа с ними

В связи с тем что обсуждаемый курс геометрии содержит в себе не только планиметрию, но и элементы стереометрии, роль наглядных пособий на уроках значительно увеличивается. Сделаем по этому поводу несколько замечаний.

I. Моделями отрезков могут служить не только спицы и карандаши. Отрезки можно сконструировать из тонких полых жёстких цилиндров: палочек для карамели, использованных стержней для шариковых ручек и др. Коктейльные палочки применять неудобно, так как они не являются жёсткими. Полые цилиндры удобно использовать для конструирования каркасных моделей многогранников, продевая внутрь цилиндра жесткую проволоку.

Чтобы сделать модель отрезка желаемой длины, можно взять жёсткие палочки и листы бумаги для записей прямоугольной формы, туго наматывая бумагу на палочку и затем клеем закрепляя эту бумагу.

II. Сплошные модели многогранников лучше не клеить, а складывать – для удобства хранения.

Например, складную модель прямоугольного параллелепипеда можно сделать так:

– на толстом картоне чертим развёртку параллелепипеда, сделав клапаны боковой поверхности и виде прямоугольников (рис. 103, *а)*;

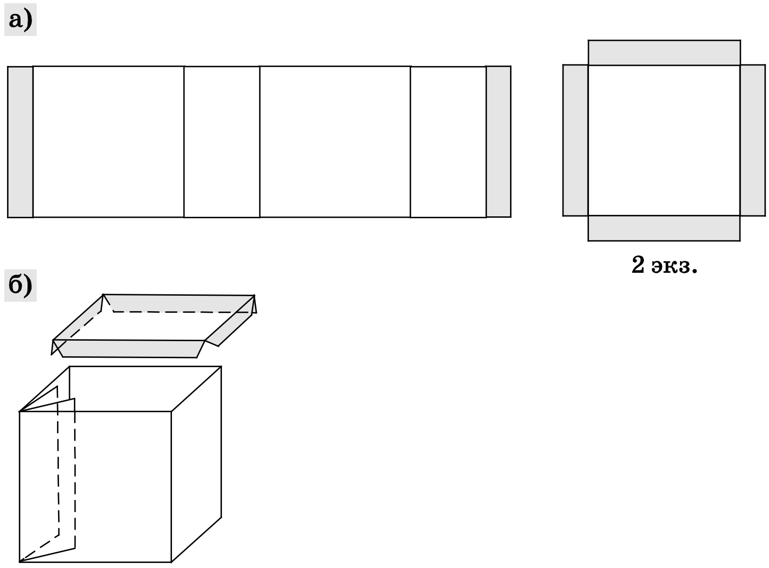


Рис. 103

– по чертёжной линейке острым предметом (иголкой, например) слегка прорезаем картон по будущим линиям сгиба и сгибаем его, также используя линейку;

– складываем боковую поверхность параллелепипеда, загибая клапаны внутрь него (рис. 103, *б)*:

– вставляем основания так, чтобы клапаны боковой поверхности были упором для оснований и скреплялись клапанами оснований.

III. Сплошные модели можно делать прозрачными. Опишем подробно (для примера), как можно сделать прозрачные модели цилиндра, конуса и куба.

Цилиндр

Материалы для изготовления: плотная прозрачная полиэтиленовая папка; несколько листов картона, скотч, нитки.

Инструменты: карандаш, шариковая ручка, циркуль, линейка, иголка.

Этапы изготовления:

1. Вырезаем из картона четыре круга диаметром 9 см.
2. Отрезаем от папки шов и разворачиваем её наружной стороной вверх.
3. Утюгом, через газету, разглаживаем сгиб папки (регулятор утюга

установить на «шерсть» или «шелк», 10 – 15 с).

4. На получившемся прямоугольном листе шариковой ручкой чертим развертку боковой поверхности цилиндра (рис. 104, *а*). Вырезаем развёртку. Используя разметку, с двух сторон прямоугольника по всей длине делаем надрезы (через каждый сантиметр, шириной 25 мм). Развёртка боковой поверхности цилиндра готова.

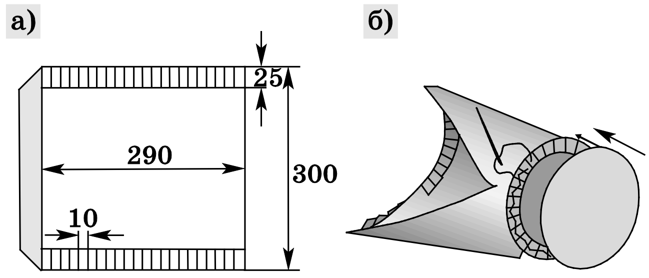


Рис. 104

5. Клапаны одной из её сторон пришиваем к вырезанному ранее из картона кругу (рис. 104, *б*). Второе основание цилиндра пришиваем к его боковой поверхности с другой стороны аналогичным образом.

6. Для того чтобы скрыть многочисленные стежки на основаниях цилиндра, на каждое из них приклеиваем по оставшемуся кругу. Стык боковой поверхности и оснований цилиндра оклеиваем скотчем.

Конус

При изготовлении модели конуса используются те же материалы и инструменты, что и при изготовлении модели цилиндра.

Этапы изготовления:

1. Вырезаем из картона два круга радиусом 7 см.
2. На прозрачном прямоугольном листе (разглаженной папке) чертим развёртку боковой поверхности конуса – сектор радиуса 25 см с угловой величиной дуги 100° (рис. 105, *а*).

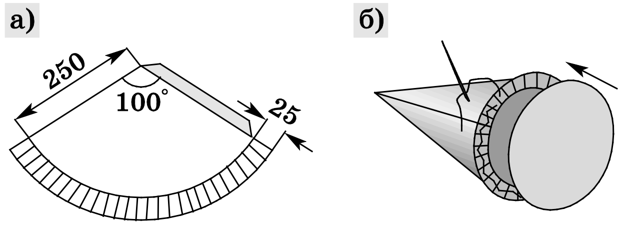


Рис. 105

3. Дальнейшие действия такие же, как при изготовлении модели цилиндра (рис. 105, *б*).

В результате получаем модель прямого кругового конуса с образующей 25 см и радиусом основания 7 см.

Куб

При изготовлении моделей многогранников будем использовать термоклеящуюся плёнку. Она удобна тем, что: а) прозрачна; б) легко приклеивается утюгом к любой поверхности; в) при наклеивании, в том числе и на каркасную модель многогранника, не морщится, хорошо натягивается.

Материалы для изготовления: 12 моделей отрезка в виде полого цилиндра длиной 12 см; термоклеящаяся плёнка; 2 м тонкой жесткой проволоки; кусок белого пластилина.

Инструменты: плоскогубцы, утюг.

Этапы изготовления:

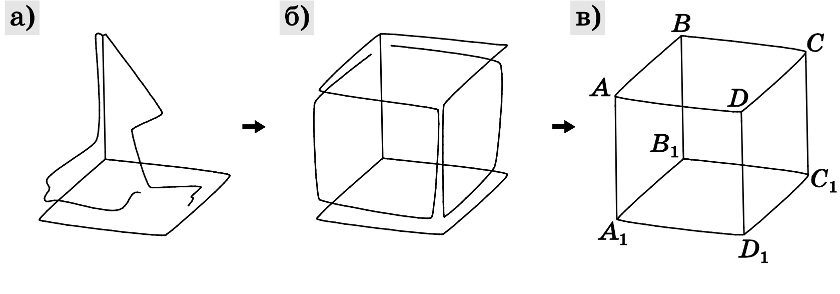


Рис. 106

1. Изготавливаем каркасную модель куба, нанизывая отрезки – цилиндры на проволоку (рис 106, *а*). Проволока может быть как цельной (тогда через некоторые отрезки – цилиндры проволока пройдёт дважды), так и не цельной. При использовании цельной проволоки каркасная модель куба получается более жёсткой. Варианты сборки каркасной модели куба могут быть различными,

например: $AB – BC – CD – DA – AA_1 – A_1D_1 – D_1D – DC – CC_1 – C_1B_1 – B_1B – BA – AA_1 – A_1B_1 – B_1C_1 – C_1D_1$. Концы проволоки в вершинах A и D_1, окручиваем несколько раз и обрезаем. В вершинах куба залепляем проволоку пластилином.

2. Из термоклеяшейся плёнки вырезаем развёртку куба. Удобно использовать развёртку, изображённую на рисунке 107.

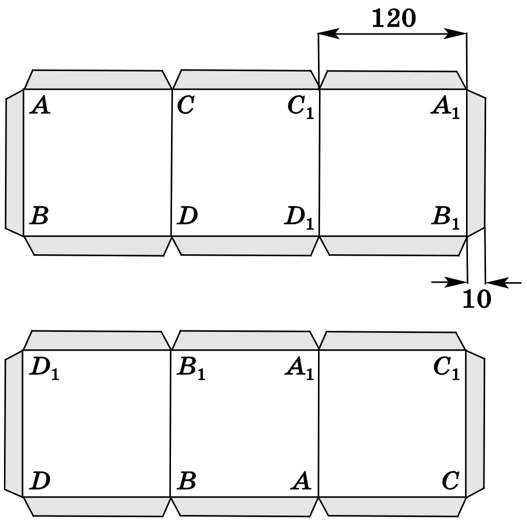


Рис. 107

3. Оклеиваем каркасную модель куба термоклеящейся пленкой. Развёртку прикладываем (клеящейся стороной плёнки вниз) к каркасной модели куба так, чтобы какой-нибудь отмеченный на ней квадрат совпал с рёбрами верхней грани куба (рис. 108).

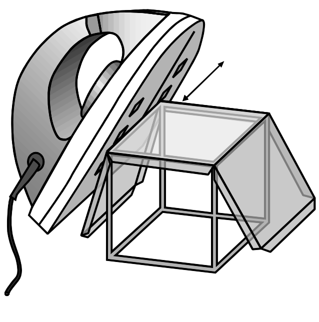


Рис. 108

Проводим утюгом (регулятор утюга установить на «шерсть» или «шелк») по одному из рёбер; натягиваем плёнку и проводим утюгом по ребру, параллельному первому, а затем по двум оставшимся рёбрам этой грани. Остальные грани куба оклеиваются аналогичным образом.

Треугольная пирамида

При изготовлении модели пирамиды используются те же материалы и инструменты, что и при изготовлении модели куба.

Изготовим модель правильной треугольной пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 10 см, а боковое ребро пирамиды равно 18 см.

Этапы изготовления:

1. Из шести отрезков-цилиндров собираем каркасную модель пирамиды. Один из возможных вариантов сборки: $AB - BC - CA - AD - DB - BC - CD$ (рис. 109).

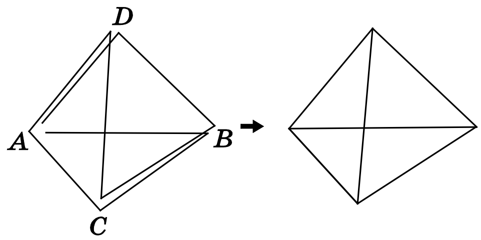


Рис. 109

2. Из термоклеящейся плёнки отрезаем развёртку треугольной пирамиды (рис. 110).

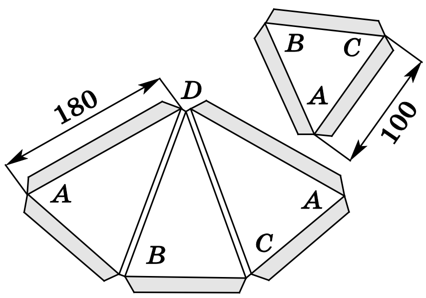


Рис. 110

3. Наклеиваем развёртку на каркасную модель пирамиды – сначала боковые грани, а затем основание (рис. 111).

Рис. 111

IV. Для работы с моделями пространственных фигур удобно использовать так называемый ***геометрический конструктор***. Можно придумать разные конструкторы – по внешнему виду, материалу и стоимости. Мы предлагаем вам конструктор, который может быть сделан при минимальной затрате денежных средств.

Основой конструктора является штатив, который можно встретить в школьных кабинетах физики и химии и две прямоугольные рамки с натянутыми на них сетками – модели двух плоскостей. Лучше всего натягивать сетки с помощью тонкой жесткой проволоки, но можно использовать и сетку от комаров. Правда, в последнем случае она довольно быстро растянется. Одну из этих «плоскостей» кладём на горизонтальную подставку штатива, а другую прикрепляем к стойке штатива (рис. 112, *а)*.

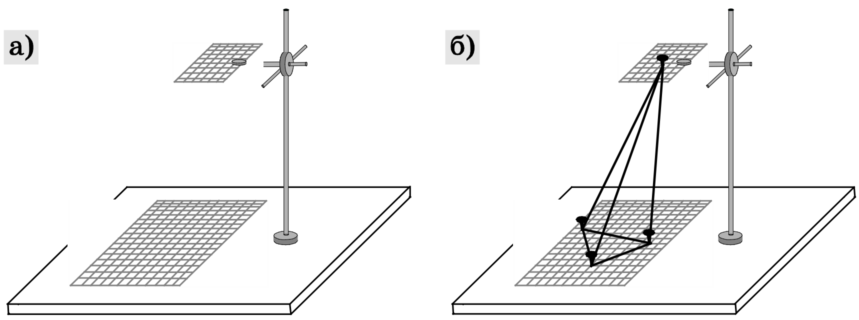


Рис. 112

Теперь, используя модели отрезков в виде резинок с закреплёнными на них крючками (плательными или из тонкой проволоки) и набор плоских фигур, мы можем быстро сделать каркасную модель любой пирамиды или призмы (рис. 112, *б),* подложив под нижнюю сетку выбранный многоугольник в качестве основания.

Для хранения всех мелких деталей конструктора удобно использовать школьный набор для черчения.

Тесты по курсу геометрии

Наряду с традиционными формами проверки авторы предполагают использование тестов. Тесты знакомят учеников и учителей с ещё одной формой контроля и приводят к экономии времени для проверки. В каждом тесте содержатся пять утверждений, на которые ученик даёт три вида ответов: положительный («да»), отрицательный («нет») или «не знаю». При желании учитель может выставить отметку за выполнение тестового задания. В этом случае предлагается такой способ выставления отметки: за каждый верный ответ на отдельный вопрос теста ученик получает балл «+1», за каждый неверный ответ получает балл «–1», за ответ «не знаю» («затрудняюсь ответить») получает балл «0». По тесту находится сумма набранных баллов. Видимо, за 5 набранных баллов имеет смысл ставить отметку 5, а за число баллов, не большее нуля, вряд ли имеет смысл ставить положительную отметку. Всё остальное – на усмотрение учителя.

При проведении тестовой работы на её выполнение можно отводить примерно 15 минут. Однако учитель может сам решать, сколько его ученикам надо времени для одного теста.

Ученикам надо объяснить, что в тех случаях, когда утверждение может быть для одних случаев верно, а для других неверно, следует давать ответ «нет». Например, мы говорим, что равенство $(x+1)^2=x^2+1$ неверно, хотя при $x=0$ оно верно, а при других x – неверно.

Тест 1. Пересечение фигур

Пересечением двух квадратов может быть:

1) точка;
2) отрезок;
3) квадрат;
4) треугольник;
5) восьмиугольник.

Ответы: + + + + +

Тест 2. Объединение фигур

Объединением двух треугольников может быть:

1) треугольник;
2) квадрат;
3) шестиугольник;
4) пятиугольник;
5) двенадцатиугольник.

Ответы: + + + + +

Тест 3. Взаимное положение прямых

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда:

1) прямые AB и C_1D_1 параллельны;
2) прямые AD_1 и BA_1 пересекаются;
3) прямые B_1D_1 и C_1D не пересекаются;
4) прямые AC и BD_1 пересекаются;
5) прямые AD_1 и B_1C параллельны.

Ответы: + - + - -

Тест 4. Действия с отрезками

На прямой существуют такие три точки A, B, C, что:

1) $AB + AC = BC$;
2) $AB + AC > BC$;
3) $AB + AC < BC$;
4) $AB – AC \geq 2BC$;
5) $AB + AC \leq 3BC$.

Ответы: + + - - +

Тест 5. Равенство отрезков

Отрезки AB и CD равны, если:

1) они лежат на отрезке AD и $AC = BD$;
2) они являются рёбрами одного и того же куба;
3) они имеют общую середину O и $AO = CO$;

4) $AB = KL$, $CD = LK$;

5) $AD = 2AB + CD$, $DA = BA + 2DC$.

Ответы: + + + + +

Тест 6. Перпендикулярные прямые

Могут быть взаимно перпендикулярны:

1) диагонали прямоугольника;

2) высоты треугольника;

3) диаметры окружности;

4) две прямые симметричные относительно оси;

5) ребро куба и диагональ его грани.

Ответы: + + + + +

Тест 7. Окружность и круг

В каждом круге:

1) есть самая большая хорда;

2) есть самая маленькая хорда;

3) для каждой хорды найдётся равная ей;

4) можно провести два диаметра, разбивающие его на три части;

5) есть два центра симметрии.

Ответы: + - + - -

Тест 8. Сфера и шар

В каждом шаре:

1) есть самая маленькая хорда;

2) все меридианы равны;

3) две самые далёкие точки центрально симметричны;

4) есть самая большая параллель;

5) есть самая маленькая параллель.

Ответы: - + + + -

Тест 9. Углы

Верны такие утверждения:

1) если углы не равны, то они не вертикальные;
2) если углы не вертикальные, то они не равны;
3) если угол острый, то угол, смежный с ним – не прямой;
4) если равны углы, смежные с двумя данными углами, то равны и углы, вертикальные с данными углами;
5) из двух двугранных углов тот больше, у которого линейный угол больше.

Ответы: + - + + +

Тест 10. Углы

Про данный угол было высказано несколько утверждений.

А) Он больше 60^o, но меньше 80^o.

Б) Угол, вертикальный данному, больше 50^o.

В) Угол, смежный с ним, больше 100^o.

Г) Угол, смежный с ним, меньше 130^o.

Д) Биссектриса этого угла образует с его стороной угол больше 40^o.

Е) Тупой угол с той же вершиной, что и данный, образованный перпендикулярами к его сторонам, больше 100^o, но меньше 120^o.

В дальнейшем оказалось, что утверждение *А* верно. Верны ли при этом:

1) утверждение *Б*;
2) утверждение *В*;
3) утверждение *Г*;
4) утверждение *Д*;
5) утверждение *Е*?

Ответы: + + + - +

Тест 11. Перпендикулярность

Две прямые лежат в одной плоскости. Тогда:

1) если они перпендикулярны, то они делят плоскость на четыре равных угла;
2) на этой плоскости можно провести прямую, перпендикулярную каждой из данных прямых;

3) в пространстве можно провести прямую, перпендикулярную каждой из данных прямых;
4) через них можно провести две плоскости, перпендикулярные между собой;
5) они перпендикулярны, если делят плоскость на четыре равных угла.

Ответы: + - + + +

Тест 12. Перпендикулярные прямые

Взаимно перпендикулярны:

1) биссектрисы смежных углов;
2) биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых, пересечённых третьей прямой;
3) две прямые, одна из которых параллельна некоторой прямой, а другая перпендикулярна этой прямой;
4) две биссектрисы треугольника;
5) диагонали двух смежных граней куба, идущие из одной вершины куба.

Ответы: + + + - -

Тест 13. Равнобедренный треугольник

Треугольник *ABC* не является равнобедренным, если:

1) его углы *A* и *B* не равны;
2) его периметр равен 5, *AB*=1, *BC*=2;
3) его нельзя разбить одним отрезком на два равных треугольника;
4) медиана из вершины *A* равна высоте из вершины *B*;
5) из треугольника *ABC* и равного ему нельзя составить четырёхугольник с равными сторонами.

Ответы: - - + - +

Тест 14. Свойства равнобедренного треугольника

В любом равнобедренном треугольнике:

1) хотя бы одна медиана является его биссектрисой;
2) хотя бы одна биссектриса не является его высотой;

3) хотя бы две высоты равны;
4) хотя бы одна высота лежит внутри него;
5) найдутся две оси симметрии.

Ответы: + - + + -

Тест 15. Признаки равнобедренного треугольника

Треугольник является равнобедренным, если:

1) два его угла равны;
2) у него есть ось симметрии;
3) одна из его биссектрис является его высотой;
4) его вершины находятся в вершинах квадрата;
5) его вершины находятся в вершинах A, C, B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответы: + + + + +

Тест 16. Осевая симметрия

Фигура имеет ось симметрии, если эта фигура:

1) угол;
2) дуга окружности;
3) полуплоскость;
4) объединение двух равных квадратов, лежащих в одной плоскости, пересечением которых является их общая вершина;
5) пересечение двух кругов.

Ответы: + + + + +

Тест 17. Осевая симметрия.

Один из данных треугольников имеет одну ось симметрии, а другой не имеет осей симметрии. Тогда:

1) эти треугольники не равны;
2) их пересечение не может иметь ось симметрии;
3) их объединение не может иметь ось симметрии;
4) симметричный треугольник можно разбить отрезком на части, имеющие оси симметрии;

5) не симметричный треугольник нельзя разбить отрезком на части, имеющие оси симметрии.

Ответы: + - - + -

.Тест 18. Симметрия прямоугольника

Верны такие утверждения:

1) в любом прямоугольнике не меньше двух осей симметрии и не больше четырёх осей симметрии;
2) существует прямоугольник, у которого три оси симметрии;
3) любое пересечение двух прямоугольников имеет ось симметрии;
4) прямоугольник имеет центр симметрии;
5) прямоугольник имеет два центра симметрии.

Ответы: + - - + -

Тест 19. Сумма углов треугольника

Верны такие утверждения:

1) если каждый из двух углов треугольника больше 60^o, то его третий угол меньше 60^o;
2) если угол при вершине равнобедренного треугольника меньше 100^o, то угол при его основании меньше 40^o;
3) если один из углов прямоугольного треугольника не меньше 30^o, то в нём найдётся угол не больше 60^o;
4) каждый угол треугольника меньше суммы двух других углов;
5) при увеличении одного из углов треугольника другие два уменьшаются.

Ответы: + - + - -

Тест 20. Сумма углов треугольника

Верно, что:

1) в прямоугольном треугольнике один из углов равен сумме двух других;
2) наибольший угол треугольника больше суммы двух других;
3) средний по величине угол треугольника больше 60^o;

4) если из двух треугольников составить четырёхугольник, то сумма углов четырёхугольника равна 360°;
5) если у двух равнобедренных треугольников есть по равному углу, то и остальные их углы соответственно равны.

Ответы: + - - + -

Тест 21. Сравнение элементов треугольника

В треугольнике ABC сторона $AB=2$, сторона $AC=3$ и угол $B<45^{\circ}$.

Верно, что:

1) $\angle C<45^{\circ}$;
2) угол A – тупой;
3) периметр треугольника ABC больше 8;
4) периметр треугольника ABC меньше 10;
5) медиана CM больше 4.

Ответы: + + + + -

Тест 22. Сравнение длин и углов

В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB=3$, сторона $BC=1$. Точка M – середина стороны CD, точка K лежит на отрезке CM.

Верно, что:

1) периметр треугольника ABK больше 6;
2) $AM+MK+KB<5$;
3) $AM<AK$;
4) $\angle MBC<\angle MAB$;
5) $\angle KAB=\angle AKD$.

Ответы: + + + - +

Тематическое планирование

Дадим два примерных варианта планирования, рассчитанные на изучение геометрии в течении всего года (68 часов) и в течении трёх четвертей (50 часов).

Вариант 1 (4 четверти, 68 часов)

Введение		**2 часа**
Глава I. Начала геометрии		**26 часов**
§ 1.	Отрезки	6 часов
§ 2.	Окружность и круг. Сфера и шар	4 часа
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 1	1 час
§ 3.	Углы	10 часов
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 2	1 час
Глава II. Треугольники		**18 часов**
§ 4.	Первые теоремы о треугольниках	7 часов
§ 5.	Сравнение сторон и углов треугольников	6 часов
	Решение задач	4 часа
	Контрольная работа № 3	1 час
Глава III. Расстояния и параллельность		**14 часов**
§ 6.	Расстояние между фигурами	3 часа
§ 7.	Параллельность прямых	5 часов
§ 8.	Сумма углов треугольника	3 часа
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 4	1 час
Повторение и резерв		**8 часов**

Вариант 2 (3 четверти, 50 часов)

Введение		**2 часа**
Глава I. Начала геометрии		**20 часов**

§ 1.	Отрезки	6 часов
§ 2.	Окружность и круг. Сфера и шар	3 часа
§ 3.	Углы	8 часов
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 1	1 час
Глава II. Треугольники		**15 часов**
§ 4.	Первые теоремы о треугольниках	7 часов
§ 5.	Сравнение сторон и углов треугольников	5 часов
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 2	1 час
Глава III. Расстояния и параллельность		**13 часов**
§ 6.	Расстояние между фигурами	2 часа
§ 7.	Параллельность прямых	5 часов
§ 8.	Сумма углов треугольника	3 часа
	Решение задач	2 часа
	Контрольная работа № 3	1 час

Учебное издание

Вернер Алексей Леонидович

Рыжик Валерий Идельевич

Ходот Татьяна Георгиевна

ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации

для учителя

7 класс

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *И. В. Рекман*

Младший редактор *Е. В. Трошко*

Художник *С. А. Крутиков*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Корректор *О. В. Крупенко*